Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09

Bärwolff/Böse/Penn-Karras/Tröltzsch 16. Februar 2009

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

a) Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt.

b) Untersuchen Sie f auf lokale und globale Extrema!

2. Aufgabe 8 Punkte

Sei P ein Polynom 5. Grades mit reellen Koeffizienten und habe die doppelte Nullstelle $-i$.

a) Begründen Sie, warum P mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Wieviele **verschiedene** Nullstellen hat P?

b) Die reelle Nullstelle sei nun gegeben durch $x_0 = 1$, d.h. $P(1) = 0$. Geben Sie ein solches Polynom explizit an. Ist P ungerade, d.h. $P(-x) = -P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

3. Aufgabe 8 Punkte

Es seien (x_n) und (z_n) die reellen Folgen definiert durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+n\pi}} \qquad \text{und} \qquad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\,.$$

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{x^2}-1)+2} & \text{für } x \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ und $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n)$.

c) Folgern Sie aus b), dass die Funktion f in $x = 0$ unstetig ist.

d) Ist f in $x = 0$ differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe 8 Punkte (2+2+4)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen immer wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Antwort falsch ist.

a) Es gibt keine reelle Funktion, die durch ein trigonometrisches Polynom mit nur endlich vielen Gliedern *exakt* approximiert wird.

b) Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit den Eigenschaften $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

c) Die Gleichung $\cos x = x$ besitzt eine reelle Lösung.

5. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := (x-\frac{3}{2})^9 + \frac{1}{5}(x-\frac{3}{2})^5 + (x-\frac{3}{2})^4 + x - \frac{3}{2}.$$

Bestimmen Sie $f(\frac{3}{2})$, $f'(\frac{3}{2})$, $f^{(5)}(\frac{3}{2})$ und $f^{(7)}(\frac{3}{2})$.