TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2008/09
Fakultät II - Mathematik 06.04.2009
Dozenten: Bärwolff/Böse/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistenten: Ammar, Dhamo, Neitzel

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 2008/09
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Die linke Seite $\sqrt{x^2+1}$ der Ungleichung ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und ist nicht negativ . Auf $\mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2+1 \leq 4x^2$. Diese hat die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ entfällt wegen $x \geq 0$. Die Lösungsmenge ist $L = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Variante 1: $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = x + \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = x + \ln(x^2+1) + c$

Variante 2: $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx \overset{z=x^2+1,}{=} x + \int \frac{1}{z}dz = x + \ln(x^2+1) + c$

b) Variante 1: $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \int_1^e (\ln x)'\ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_0^e = \frac{1}{2}(\ln^2(e) - \ln^2(1)) = \frac{1}{2}.$

Variante 2: $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx \overset{z=\ln x}{=} \int_0^1 z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$

Variante 3: partielle Integration: $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \ln^2(x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx$

$\displaystyle\Rightarrow \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_0^e = \frac{1}{2}(\ln^2(e) - \ln^2(1)) = \frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \lim_{a\to 1}\frac{1}{1-x}\Big|_0^a = \infty$, also existiert das uneigentliche Integral nicht.

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt{n}+\cos(2n+1)}{2n^3+n\pi+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}+\frac{\cos(2n+1)}{n^3})}{n^3(2+\frac{\pi}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{2}$, da $|\cos(2n+1)| \leq 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin(x^2)} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x\cos(x^2)} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{1}{2}.$

4. Aufgabe

(9 Punkte)

a) Der maximale Definitionsbereich ist gegeben durch $D_f =]0, +\infty[$.

b) Variante 1: f ist als Quotient differenzierbarer Funktionen zweimal differenzierbar auf $]0, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ und $f''(x) = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ und somit einziger Kandidat für ein lokales Extremum in $]0, +\infty[$ ist $x_0 = e$. Es gilt $f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$, daher hat f in $x_0 = e$ ein lokales Maximum. Weiterhin gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 < \frac{1}{e} = f(e)$. Daher besitzt $f(x)$ in $x_0 = e$ ein globales Maximum.

Variante 2: f ist als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $]0, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ und somit einziger Kandidat für ein lokales Extremum in $]0, +\infty[$ ist $x_0 = e$. Auf $]0, e[$ gilt $f'(x) > 0$ und auf $]1, +\infty[$ gilt $f'(x) < 0$. . Also ist $f(x)$ auf $]0, e]$ monoton wachsend und auf $[e, +\infty[$ monoton fallend. Daher hat $f(x)$ in $x_0 = e$ ein lokales und globales Maximum.

5. Aufgabe

(9 Punkte)

a)
- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt: $f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\frac{(1-1)!}{(1-x)^1}$
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei erfüllt für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$
- Induktionsbehauptung: $f^{(n+1)}(x) = -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
&\overset{I.V.,}{=} (-(n-1)!(1-x)^{-n})' \\
&= -(n-1)!(-1)(-n)(1-x)^{-n-1} \\
&= -n!(1-x)^{-(n+1)} \\
&= -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

b) Das Taylorpolynom 3. Grades zu einer Funktion f im Entwicklungspunkt x_0 hat die Form

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

Es gilt $f(0) = \ln(1) = 0$, und mit a) gilt: $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = -2$, und daher

$$T(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$