Analysis I für Ingenieure - Juli-Klausur - Lösungen - Rechenteil - SS09

1. Aufgabe **7 Punkte**

Ermitteln Sie sämtliche reelle Lösungen x der Ungleichung: $|x^2 - 2| \geq x$. Geben Sie die Lösungsmenge in Intervall-Notation an.

1. Fall: ($x^2 \geq 2$; d.h. $x \leq -\sqrt{2}$ oder $x \geq \sqrt{2}$)

$$x^2 - 2 \geq x$$
$$x^2 - x - 2 \geq 0$$
$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$-\sqrt{2}$ -1 $\sqrt{2}$ 2

✓ X X X ✓

$]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [2, \infty[$

2. Fall: ($x^2 \leq 2$; d.h. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$)

$$-x^2 + 2 \geq x$$
$$-x^2 - x + 2 \geq 0$$
$$-(x-1)(x+2) \geq 0$$

-2 $-\sqrt{2}$ 1 $\sqrt{2}$

X X ✓ X X

$[-\sqrt{2}, 1]$

$$\mathcal{L} = \,]-\infty, 1] \cup [2, \infty[\, = \mathbb{R} \setminus \,]1, 2[$$

2. Aufgabe **8 Punkte**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 2\sqrt{3} + 2i$.

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ dar:

$$z_1 := 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad z_2 := \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163}$$

a) $r = \sqrt{12+4} = 4$, $\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{18}}, \quad z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{13\pi}{18}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{25\pi}{18}}$$

b) $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = re^{i\phi}$ mit $r = 2, \phi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$$z_2 = \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163} = \left(\frac{1+3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}\right)^{163}$$
$$= \left(\frac{3+9i+i+3i^2}{10}\right)^{163} = \left(\frac{10i}{10}\right)^{163} = i^{163} = i^{4(40)+3} = i^3 = -i$$

3. Aufgabe **7 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^4 - 7n + 1}{5 - 2n^4}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(3n)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4 - 7n + 1}{5 - 2n^4} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{6 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n^4} - 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{-2} = -3$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(3n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2) + \ln(n)}{\ln(3) + \ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\left((1-x)^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} \overset{\text{Stetigkeit von } e^x}{=} e^{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-x)\right)}$

$\overset{\text{L'Hospital}}{=} e^{\left(\frac{\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1-x}}{\lim_{x\to 0} 1}\right)} = e^{-1}$

---

4. Aufgabe **8 Punkte**

Sei $f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ dritten Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von $T_3(x)$ näherungsweise den Wert $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ und schätzen Sie den Fehler ab.

---

a)

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(1)$	$\frac{f^{(k)}(1)}{k!}$
0	$\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$	0	0
1	$(x+1)^{-}1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$-(x+1)^{-2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
3	$2(x+1)^{-3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$\Longrightarrow \quad T_3(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3$

b) Weil $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ für $x = 2$ gilt, setzen wir $x = 2$ in T_3 ein:

$$T_3(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{12-3+1}{24} = \frac{5}{12}$$

Das Restglied $R_3(2) = \frac{-6}{4!(\xi+1)^4}(2-1)^4$ wird (für $x = 2$ und) $\xi \in [1,2]$ abgeschätzt:
$|R_3(2)|$ ist maximal für $\xi = 1$: $|R_3(2)| < \frac{6}{24(2)^4}1^4 = \frac{1}{64}$

---

5. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-9}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

---

a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-9}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}\right)\,dx = \int\left(\frac{-2/3}{x+3}+\frac{2/3}{x-3}\right)\,dx$

$= -\frac{2}{3}\ln|x+3| + \frac{2}{3}\ln|x-3| + C$

b) Partielle Integration mit $v = x$, $u' = (x+3)^{\frac{1}{2}}$ anwenden:

$$\int x\sqrt{x+3}\,dx = \frac{2}{3}x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+3)^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{2}{3}x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(x+3)^{\frac{5}{2}} + C$$

c) Substitution mit $u = \cos(x^2)$, $du = -2x\sin(x^2)dx$ anwenden:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x\sin(x^2)e^{\cos(x^2)}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2}e^u\,du = \tfrac{7}{2}e^u\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{7}{2}\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

d) Substitution mit $u = \sqrt[3]{x}$ ($\Rightarrow u^3 = x \Rightarrow 3u^2du = dx$)

$$\int_1^8 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{3u^2}{u^3+u}du = \int_1^2 \frac{3u}{u^2+1}du = \frac{3}{2}\ln|u^2+1|\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\left(\ln(5)-\ln(2)\right)$$