Analysis I für Ingenieure - Juli-Klausur - Lösungen - Verständnisteil - SS 09

---

1. Aufgabe 5 Punkte

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Weil $\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ die Komposition der stetigen Funktionen $\sin(x)$ und $\frac{\pi}{5}x$ ist, ist $g(x), x \neq 0$ ein Quotient von stetigen Funktionen, und diese sind überall dort stetig, wo sie definiert sind. D.h. g ist stetig für $x \neq 0$. Für die Stetigkeit in $x = 0$ muss gelten

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = a.$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$. Daraus folgt: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)}{x} = \dfrac{\pi}{5} = a$

---

2. Aufgabe 8 Punkte

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Aussage $\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-2) = 2n^2$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$.

b) Seien A und x reelle Zahlen mit $A > 0, x_0$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{A}{x_n}\right)$. Zeigen Sie, dass falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

---

a) Für $n = 3$ ist die Formel erfüllt: $\sum\limits_{k=1}^{3}(4k-2) = 2 + 6 + 10 = 18 = 2 \cdot 3^2$

Ist $\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-2) = 2n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, so gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= \sum_{k=1}^{n}(4k-2) + (4(n+1)-2) = 2n^2 + 4n + 2 \\ &= 2(n^2 + 2 + 1) = 2(n+1)^2\end{aligned}$$

b) Aus $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{A}{x_n}\right)$ und Konvergenz der Folge (x_n) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{A}{x_n}\right)$.

Sei $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt $L = \dfrac{1}{2}\left(L + \dfrac{A}{L}\right)$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{L}$$

$$L^2 = A$$

$A > 0, x_n > 0 \Rightarrow L \geq 0 \Rightarrow L = \sqrt{A}$

---

3. Aufgabe 6 Punkte

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 + 3x = 3$ genau eine reelle Lösung hat.

Sei $f(x) = x^5 + 3x - 3$. Die Nullstellen von f sind genau die Lösungen der Gleichung $x^5 + 3x = 3$.

Die Funktion f hat mindestens eine Nullstelle:

Das Polynom f ist stetig mit $f(0) = -3 < 0, f(1) = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in \,]0, 1[$ mit $f(\xi) = 0$.

Die Funktion f hat höchstens eine Nullstelle:

Weil die Ableitung $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$ positiv und deshalb **streng** monoton wachsend kann es also keine weitere Nullstellen geben.

---

4. Aufgabe 5 Punkte

Das Taylorpolynom 4. Grades einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist gegeben durch $T_4(x) = 3(x-1)^4 - 5(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 6$.

a) Bestimmen Sie $T_2(x)$, das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion f in dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie die Tangentengleichung an den Graphen von f durch den Punkt $(1, f(1))$.

Das n-te Taylorpolynom von f in $x = 1$ ist gegeben durch $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(1)}{k!}(x-1)^k$.

a) $T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(1)}{k!}(x-1)^k = 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 6$

b) Die Tangentengleichung durch den Punkt $(1, f(1))$ ist das Taylorpolynom vom 1. Grad in $x_0 = 1$, nämlich $y = -7(x-1) + 6$

---

5. Aufgabe 16 Punkte

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an oder finden Sie ein Gegenbeispiel, **sonst gibt es keine Punkte!**

a) Ist $h'(x) \in [2, 5]$ für alle $x \in [a, b]$, so ist h injektiv auf $]a, b[$.

b) Ist die Funktion f nicht differenzierbar in $x = 1$, so hat f kein Extremum in $x = 1$.

c) Ist $F'(x) = G'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $F(x) = G(x)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \cos(1)$

e) Ist $\int_{-a}^{a} k(x)dx = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$, so ist $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)dx = 0$.

f) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -1$

g) Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k - \cos(k\pi))$ divergiert.

h) Die unendliche Reihe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{3k - 6k^2}{10k + 7}$ divergiert.

---

a) Wahr. $h'(x) > 0$ auf $[a, b] \Rightarrow h$ **streng** monton wachsend also injektiv auf $]a, b[$.

b) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = |x - 1|$ ist nicht in $x - 1$ differenzierbar, hat dort jedoch ein globales Minimum.

c) Falsch. Für $G(x) = F(x) + C$ mit $C \neq 0$ ist $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x)$ aber $F(x) \neq G(x)$.

d) Wahr. Riemannsche Summe der Funktion $\sin(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$

e) Falsch. $\int_{-a}^{a} x dx = \frac{x^2}{2}|_{-a}^{a} = 0$. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim\limits_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} x dx + \lim\limits_{c\to\infty} \int_{0}^{c} x dx$, falls diese existieren. Das ist ja aber nicht der Fall: $\lim\limits_{c\to\infty} \frac{x^2}{2}|_0^c = \lim\limits_{c\to\infty} \frac{c^2}{2} - 0 \to \infty$.

f) Falsch. Das Integral einer positiven Funktion muss positiv sein. (Alternativ: Wegen der Polstelle ist das Integral uneigentlich: $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{b\nearrow 0} \int_{-2}^{b} \frac{1}{x^2} dx + \lim\limits_{c\searrow 0} \int_{c}^{2} \frac{1}{x^2} dx$, falls diese Integrale existieren. Das ist nicht der Fall.

g) Falsch. $\sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k - \cos(k\pi)) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$ konvergiert gegen Null.

h) Wahr. $\frac{3k-6k^2}{10k+7}$ konvergiert gegen $-\infty$; d.h. $(\frac{3k-6k^2}{10k+7})$ ist keine Nullfolge.