Analysis-I-Klausur Februar 2010 – Lösungen zum Verständnisteil

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Aus der Tangente $y = 3 - 4x$ an der Stelle $x_0 = 0$ erhält man den Funktionswert $f(0) = 3$ und die Steigung $f'(0) = -4$.

Weil f an der Stelle $x_1 = 1$ ein lokales Extremum hat gilt $f'(1) = 0$.

Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$ ergibt das die Gleichungen

$f(0) = c = 3$, $f'(0) = b = -4$ und $f'(1) = 2a + b = 0$.

Es kommen also nur die Koeffizienten $c = 3$, $b = -4$ und $a = 2$, also das Polynom $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ in Frage.

Wegen $f''(x) = 4 \Rightarrow f''(1) = 4 \neq 0$ hat f in $x_1 = 1$ tatsächlich ein lokales Extremum.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) $|z| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^5\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right|^5 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}^5$

$= \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}}^5 = \sqrt{\frac{4}{16}}^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

b) es gibt Punkte für folgende Details der Skizze:

das Äußere inklusive Rand eines Kreises , Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden, der Ursprung liegt im Inneren des Kreises

Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Die Substitution $t = f(x)$, $dt = f'(x)\,dx$ ergibt

$\int f'(x) \cdot \sqrt{f(x)}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{t}^3 + c = \frac{2}{3}\sqrt{f(x)}^3 + c$

b) Partielle Integration mit $u' = f''$, $u = f'$, $v = x$, $v' = 1$ ergibt

$\int x\,f''(x)\,dx = x\,f'(x) - \int f'(x)\,dx = x\,f'(x) - f(x) + c$

Analysis-I-Klausur Februar 2010 – Lösungen zum Verständnisteil

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Es gilt $f(0) = \arctan 0 - \frac{1}{0+1} = 0 - 1 = -1 < 0$

und $f(1) = \arctan 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4} > 0$.

Laut Zwischenwertsatz hat f also (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $]0, 1[$.

Es ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ für alle x.

Laut Monotoniekriterium ist f also streng monoton wachsend.

Deshalb kann f höchstens eine Nullstelle haben.

Also hat f genau eine Nullstelle.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Für alle $x > 0$ und alle $x < 0$ ist f jeweils als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar.

Um an der Stelle $x = 0$ differenzierbar zu sein muss f zunächst stetig sein.

Es gilt $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} e^{ax+1} = e = f(0)$

und $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \sin(2x) + b\cos(x) = b$.

Deshalb muss $b = e$ sein.

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^{ax+1} - e}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \nearrow 0} \frac{a\, e^{ax+1}}{1} = a \cdot e$$

Der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(2x) + e\cos(x) - e}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{2\cos(2x) - e\sin(x)}{1} = 2$$

Damit f in $x = 0$ differenzierbar ist muss also $a = \frac{2}{e}$ gelten.