1. Aufgabe

12 Punkte

a) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-4n^3+n}{3n^3-n+2}, \quad ii)\ \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}), \quad iii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5}.$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 x}$.

---

a) i) **(3 Punkte)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n^3+n}{3n^3-n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{3}{n}-4+\frac{1}{n^2})}{n^3(3-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-4+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = -\frac{4}{3}$$

ii) **(3 Punkte)**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-1)}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

iii) **(2 Punkte)**

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1} = 1$

b) **(4 Punkte)**

Es gilt $\lim_{x\to 0} e^x-1-x = 0 = \lim_{x\to 0} \sin^2 x = 0$. Also ist die Regel von de l'Hospital anwendbar

Damit gilt $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2\sin x\cos x}$, falls der letzte Grenzwert existiert. Da gilt erneut $\lim_{x\to 0} e^x-1 = 0 = \lim_{x\to 0} 2\sin x\cos x$. De l'Hospital ist wieder anwendbar

und es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos^2 x-2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

---

2. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$a)\ \int \frac{2}{(x-2)(x-1)}dx \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos(2t)dt \qquad c)\ \int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$$

---

a) **(4 Punkte)**
Führe Partialbruchzerlegung durch: $\frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ mit $A = -2$ und $B = 2$. (mit Rechnung: Zuhaltemethode, oder ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich) Damit folgt

$$\int \frac{2}{x-2)(x-1)} dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} dx = 2\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C.$$

b) **(3 Punkte)**
Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt &= -\cos t \cos(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t(-2\sin(2t)) dt \\ &= 1 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin(2t) dt \\ &= 1 - 2(\sin t \sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \cos(2t) dt) \\ &= 1 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt. \end{aligned}$$

Also folgt

$$-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt = 1, \quad \text{also} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt = -\frac{1}{3}.$$

c) **(4 Punkte)** Es gilt

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \searrow 0} \int_a^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

mit der Substitution $t = \sqrt{x}, x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ (geht auch mit $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) folgt

$$\int_a^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\pi} 2t\frac{\sin t}{t} dt = 2\int_{\sqrt{a}}^{\pi} \sin t dt = -2\cos t\Big|_{\sqrt{a}}^{\pi} = 2 + 2\cos\sqrt{a}$$

und damit

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \searrow 0} 2(1 + \cos\sqrt{a}) = 4.$$

Alternativ kann auch erst Stammfunktion berechnet werden und dann die Grenzen eingesetzt werden.

---

3. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie für die Funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\sqrt{1+x}$ das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Schätzen Sie den Betrag des Restglieds $|R_2(x)|$ für $x \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$ geeignet nach oben ab.

Es ist $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$, also

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$$

Alternativ für die erste Ableitung: $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1+x)}$.
Es gilt

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

und $R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)^3 = \frac{1}{6}\frac{x^3}{(1+\xi)^3}$ für ein ξ zwischen x und 0.
$|x^3|$ ist am größten an den Intervallgrenzen $-\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{10}$ und $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^3}$ ist monoton fallend. Wenn $x \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$, so folgt auch $\xi \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$ und damit gilt

$$|R_2(x)| = \frac{1}{6}\frac{|x|^3}{(1+\xi)^3} \leq \frac{1}{6}(\frac{1}{10})^3 \cdot (\frac{9}{10})^{-3} (= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9^3} = \frac{1}{4374}).$$

---

4. Aufgabe

10 Punkte

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{-5}^{x} e^{-t^2} dt$.

a) Bestimmen Sie F'.

b) Zeigen Sie, dass F streng monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass F genau eine Nullstelle besitzt.

---

a) **(3 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t^2}$. f ist stetig als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist F eine Stammfunktion von f, also $F'(x) = f(x) = e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Stetigkeit von f muss nicht unbedingt kommen, aber die Erwähnung des Hauptsatzes ist ein Punkt wert.

b) **(3 Punkte)**
Es ist F differenzierbar mit $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Monotoniekriterium ist F streng monoton wachsend.

c) **(4 Punkte)**
-5 ist eine Nullstelle von F, denn $F(-5) = \int_{-5}^{-5} e^{-t^2} dt = 0$. Aufgrund der strengen Monotonie gilt $F(x) < 0$ für alle $x < -5$ und $F(x) > 0$ für $x > -5$. Also ist -5 einzige Nullstelle von F.
Alternativ: Aufgrund der strengen Monotonie ist F injektiv und kann daher nur höchstens eine Nullstelle haben.

---

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2, & x < 5 \\ bx - 2, & x \geq 5 \end{cases}$. Bestimmen Sie alle b, sodass f stetig ist.

b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Geben Sie alle $x \in \mathbb{R}$ an, in denen g differenzierbar ist.

a) **(4 Punkte)**
Für beliebiges b und $x < 5$ bzw. $x > 5$ ist f als Polynom stetig. Kritische Stelle ist also $x = 5$. Damit f stetig in 5 ist, muss gelten $\lim_{x\searrow 5} f(x) = \lim_{x\nearrow 5} f(x) = f(5)$.
Es gilt $\lim_{x\searrow 5} f(x) = 5b - 2 = f(5)$ und $\lim_{x\nearrow 5} f(x) = 23$. Also muss gelten $5b - 2 = 23$, also $b = 5$.

b) **(6 Punkte)**
Für $x \neq 0$ ist g als Produkt und Hintereinanderausführung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Um zu untersuchen, ob g in 0 differenzierbar ist, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos(\frac{1}{x^2})}{x} = x \cos(\frac{1}{x^2}).$$

Wir zeigen $\lim_{x\to 0} x \cos(\frac{1}{x^2}) = 0$. Da cos durch 1 und -1 beschränkt ist, gilt

$$|x \cos(\frac{1}{x^2}) - 0| = |x|| \cos(\frac{1}{x^2})| \leq |x|$$

und damit

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cos(\frac{1}{x^2}) = 0,$$

also ist g in allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

---

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$. **Hinweis:** Am Ende des Blattes sind ein paar Additionstheoreme aufgeführt, die Sie benutzen können.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ und $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$. **Hinweis:** Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von $(\cos x + i \sin x)^3$.
Achtung: in der Klausur stand fälschlicherweise $\sin(3x) = 3\sin x - 4\cos^3 x$ **statt** $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$**. Siehe auch die Lösung.**

---

a) **(5 Punkte)**
I.A.: $(\cos x + i \sin x)^0 = 1 = \cos(0 \cdot x) + i \sin(0 \cdot x)$ ($n = 1$ als I.A. ist auch okay: $(\cos x + i \sin x)^1 = \cos x + i \sin x = \cos(1 \cdot x) + i \sin(1 \cdot x)$)
I.V.: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$.
I.S.: Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\cos x + i \sin x)^{n+1} &= (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x) \\
&\underset{I.V}{=} (\cos(nx) + i \sin(nx))(\cos x + i \sin x) \\
&= \cos(nx)\cos x + i(\cos(nx)\sin x + \sin(nx)\cos x) - \sin(nx)\sin x \\
&\underset{(*)}{=} \cos(nx + x) + i \sin(nx + x) \\
&= \cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x)
\end{aligned}$$

in (*) gingen die Additionstheoreme $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ und $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ein.

b) **(5 Punkte)**

$$\begin{aligned}
(\cos x + i \sin x)^3 &= \cos^3 x + i3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \\
&= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) + i(3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x + i(3\sin x - 4\sin^3 x)
\end{aligned}$$

Nach a) gilt $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$. Also gilt $\cos 3x + i \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + i(3\sin x - 4\sin^3 x)$ Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Realteil und Imaginärteil übereinstimmen. Also folgt

$$\cos 3x = \mathrm{Re}(\cos x + i \sin x)^3 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

und

$$\sin 3x = \mathrm{Im}(\cos x + i \sin x)^3 = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Da die Aufgabenstellung an dieser Stelle falsch war, hat jeder einen Punkt für den letzten Schritt bekommen, auch wenn die Aufgabe nicht bearbeitet wurde.

Einige nützliche Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$