1. Aufgabe

11 Punkte

a) Finden Sie alle **komplexen Zahlen** $z \in \mathbb{C}$, die $|z-1| < |z+i|$ erfüllen und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Ebene!

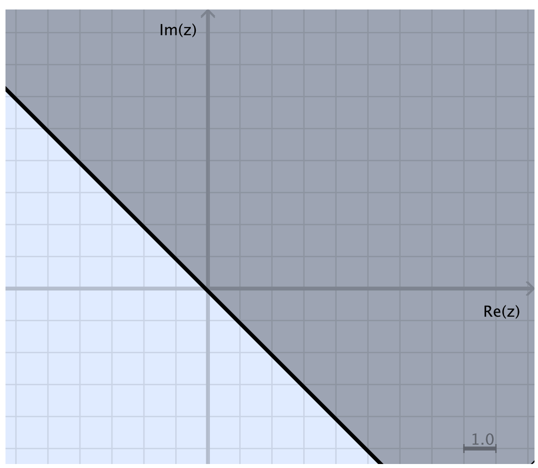
b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 + 8i = 0$.

---

a) Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& |z-1| < |z+i| \\
\Leftrightarrow\quad & |(a-1)+bi| < |a+(b+1)i| \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{(a-1)^2+b^2} < \sqrt{a^2+(b+1)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 - 2a + 1 + b^2 < a^2 + b^2 + 2b + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & -a < b
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = \{z \mid -Re(z) < Im(z)\}$



b) $z^3 + 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8i$.
Es ist $|z^3| = 8$ und $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$.
Als Argument von z haben wir $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi$.
(hier geht natürlich auch $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$)
Also ist $z^3 = 8(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$.
Somit erhalten wir die drei Wurzeln

$$z_k = 2(\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}),\ k = 0, 1, 2.$$

Also ist $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$, $z_1 = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$,
$z_2 = 2(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi)$.

2. Aufgabe

7 Punkte

Die Funktion y sei eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - 2xy(x) = 2x^2 - 1$ mit $y(0) = 1$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von y mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Das Taylorpolynom dritten Grades ist $T_3(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3$.

Es ist $y(0) = 1$ nach Voraussetzung.

$y'(x) = 2x^2 - 1 + 2xy(x)$, also $y'(0) = -1$.

$y''(x) = 4x + 2y(x) + 2xy'(x)$ (Produktregel!)

Also ist $y''(0) = 4 \cdot 0 + 2y(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 2$.

$y'''(x) = 4 + 2y'(x) + 2y'(x) + 2xy''(x) = 4 + 4y'(x) + 2xy''(x)$ (Produktregel!)

Also ist $y'''(0) = 0$.

Wir erhalten $T_3 = 1 - x + x^2$.

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f :]0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \ln x - 2x.$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den Graphen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$$

und den Geraden $x = -2$, $x = 2$ eingeschlossen wird.

---

a) Notwendige Bedingung für lokale Extrema ist $f'(x) = 0$.

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Prüfe die hinreichende Bedingung: Es ist $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x \in]0,1]$, also insbesondere $f''(\frac{1}{2}) < 0$. Also liegt bei $x = \frac{1}{2}$ ein lokales Maximum vor.

Wegen $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \ln x - 2x = -\infty$ gibt es kein globales Minimum.

Weiterhin ist $f'(x) < 0$ für $x > \frac{1}{2}$, also ist f streng monoton fallend in $]\frac{1}{2}, 1]$ und bei $x = \frac{1}{2}$ liegt ein globales Maximum vor.

Mit demselben Argument wie eben erhält man, dass bei $x = 1$ mit $f(1) = 0$ ein lokales Minimum vorliegt.

b) Man muss die Fläche berechnen, die der Graph von $f - g$ mit der x-Achse im Bereich $[-2, 2]$ einschließt. Es ist $f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Nun müssen die Nullstellen von $f - g$ im Intervall $[-2, 2]$ bestimmt werden. Eine Nullstelle lässt sich erraten und die weiteren erhält man durch Polynomdivision. Insgesamt bekommt man $f(x) - g(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

Der Flächeninhalt ergibt sich dann aus:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-2}^{-1} x^3 - 3x^2 + 4 \text{ dx} \right| + \left| \int_{-1}^{2} x^3 - 3x^2 + 4 \text{ dx} \right| \\
= & \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^{2} \right| \\
= & \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

7 Punkte

Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x - \frac{e^x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$ auf dem Intervall $[-2, 0]$ mindestens eine Nullstelle, ein Maximum und ein Minimum hat.

---

f ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt und deswegen stetig. (Bemerke, dass auch $1 + x^2 > 0$ für alle x gilt.)

Es ist $f(-2) < 0$ und auch $f(0) < 0$. Wir versuchen eine Stelle x im Intervall $[-2, 0]$ zu finden, so dass $f(x) > 0$ gilt. Z.B. ist $f(-1) = -\frac{1}{2 \cdot e} + \frac{1}{2} > 0$, da $e > 1$

Mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt, dass im Intervall $[-2, -1]$ und damit auch im Intervall $[-2, 2]$ eine Nullstelle liegen muss.

Da das Intervall $[-2, 0]$ kompakt ist, lässt sich der Satz vom Maximum/Minimum anwenden, und es folgt, dass f auf dem Intervall sowohl Maximum als auch Minimum annimmt.

5. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche sind richtig? *Bei dieser Aufgabe reicht Folgendes aus*: Geben Sie jeweils an, ob die Aussage stimmt (ohne weitere Begründung!), oder geben Sie ein Gegenbeispiel (ohne weitere Begründung!) an, das die Aussage widerlegt.

a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

b) Jede konvergente Folge ist monoton.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige andere Folge, so ist die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls Nullfolge.

d) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

e) Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

f) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergieren, dann divergiert auch die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

a) Richtig.

b) Falsch. Beispiel $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

c) Falsch. Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n^2$.

d) Falsch. Beispiel $a_n = (-1)^n$.

e) Richtig.

f) Falsch. $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$.

6. Aufgabe

13 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion!

a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ definiert durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, so gilt:

$$a_n \leq 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n\ln(n) - \ln(n!).$$

---

a) Induktionsanfang für $n = 1$: Es ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass dann auch $a_{n+1} \leq 2$ gilt.
Es ist $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ nach Voraussetzung.
Damit erhält man: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \overset{\star}{\leq} \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$ mit der Begründung $\star$, dass die Wurzelfunktion monoton wachsend ist und an der Stelle $\star$ die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde.

b) Induktionsanfang für $n = 2$:
$\sum\limits_{k=2}^{2} (k-1)\ln(\frac{k}{k-1}) = 1 \cdot \ln(2) = \ln(2)$ (linke Seite)
$2\ln(2) - \ln(2!) = \ln(2)$ (rechte Seite)
Induktionsvorausetzung:
Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: $\sum\limits_{k=2}^{n} (k-1) \cdot \ln(\frac{k}{k-1}) = n\ln(n) - \ln(n!)$.
Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass dann auch gilt:
$\sum\limits_{k=2}^{n+1} (k-1) \cdot \ln(\frac{k}{k-1}) = (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\
= \quad & n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \sum_{k=2}^{n} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\
\overset{Ind-vor.}{=} \quad & n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + n\ln n - \ln n! \\
\overset{\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)}{=} \quad & n\ln(n+1) - n\ln(n) + n\ln(n) - \ln(n!) = n\ln(n+1) - \ln(n!) \\
= \quad & (n+1)\ln(n+1) - \ln(n+1) - \ln(n!) \\
= \quad & (n+1)\ln(n+1) - (\ln(n+1) + \ln(n!)) \\
\overset{\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\cdot b)}{=} \quad & (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)
\end{aligned}$$