1. Aufgabe

10 Punkte

a) Für welche **reellen** Zahlen x ist die Ungleichung $|x| > 10|x-3|$ erfüllt?

b) Berechnen Sie die **komplexen** Lösungen der Gleichung $z \cdot \overline{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{i} = 0$ und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gaußschen Zahlenebene.

---

a) Fallunterscheidung:

1. Fall: $x < 0$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow -x > -10x + 30 \Leftrightarrow 9x > 30 \Leftrightarrow x > \frac{10}{3}$, was im Widerspruch zu $x < 0$ steht.

2. Fall: $0 \leq x \leq 3$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow x > -10x + 30 \Leftrightarrow 11x > 30 \Leftrightarrow x > \frac{30}{11}$, d.h. im zweiten Fall ergibt sich als Lösungsmenge das Intervall $]\frac{30}{11}, 3]$

3. Fall: $x > 3$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow x > 10x - 30 \Leftrightarrow 30 > 9x \Leftrightarrow \frac{10}{3} > x$, d.h. im dritten Fall ergibt sich als Lösungsmenge das Intervall $]3, \frac{10}{3}[$.

Insgesamt ist die Ungleichung für alle $x \in]\frac{30}{11}, \frac{10}{3}[$ erfüllt.

b) Wir benutzen für die Umformung folgende Tatsachen: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ und $\frac{4}{i} = -4i$

$z \cdot \overline{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{i} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 \cdot i = 4i \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$

Zeichnung: Kreis um den Ursprung mit Radius 2.

2. Aufgabe

13 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale:

$$a) \int_1^{e^2} x^3 \cdot \ln(x) dx \qquad b) \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx \qquad c) \int_0^2 \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

Tipp zu c): Substitution $t = x^2$.

---

a) Partielle Integration mit $u'(x) = x^3$ und $v(x) = \ln(x)$.

Dann ist $\int_1^{e^2} x^3 \cdot \ln(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^8}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{e^2} = \frac{e^8}{2} - \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{4}) = \frac{7e^8}{16} + \frac{1}{16}$.

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$: Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung, welche ergibt $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Hier liegt ein uneigentliches Integral vor, also rechnen wir:

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = \lim_{a\to\infty} [\ln x - \ln(x+1)]_1^a = \lim_{a\to\infty}(\ln a - \ln(a+1) + \ln 2) = \lim_{a\to\infty} \ln(\frac{a}{a+1}) + \ln 2 =$
$\lim_{a\to\infty} \ln(1+\frac{1}{a}) + \ln 2 = \ln 2$, da ln eine stetige Funktion ist und $\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} = 0$.

c) Mit Substitution $t = x^2$ gilt $x = \sqrt{t}$ (man beachte, dass in den Integrationsgrenzen x nicht negativ ist) und $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$. Die neuen Integrationsgrenzen sind $0^2 = 0$ und $2^2 = 4$. Es gilt also

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{1+x^4}\, dx &= \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\big[\arctan t\big]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}(\arctan 4 - \arctan 0) = \frac{1}{2} \arctan 4.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \ln(\cos(-x))$. Bestimmen Sie das zugehörige Taylorpolynom 3-ten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Das Taylorpolynom 3-ten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ hat die Form

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) & f(0) &= \ln(\cos 0) = \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= (\cos(-x))' \frac{1}{\cos(-x)} = \sin(-x) \frac{1}{\cos(-x)} = \tan(-x) = -\tan x & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -(1 + \tan^2 x) = -\frac{1}{\cos^2 x} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= -2(1 + \tan^2 x) \tan x & f'''(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Taylorpolynom gegeben durch

$$T_3(x) = -\frac{1}{2!} x^2 = -\frac{1}{2} x^2.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & : x < -1 \\ x & : -1 \leq x \leq 0 \\ b + e^x & : x > 0 \end{cases} .$$

Man skizziere den Graphen von f für $a = b = 0$. Wählen Sie die Zahlen a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, weisen Sie die Stetigkeit in diesem Falle nach, und skizzieren Sie den Graphen mit diesen Parametern.

Die Exponentialfunktion ist nach stetig. Außerdem ist für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Funktion, die durch $x \to b + e^x$ gegeben ist, stetig. Also ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Die Aufgabe ist also a und b so zu wählen, dass in den Punkten -1 und 0, jeweils der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle übereinstimmt.

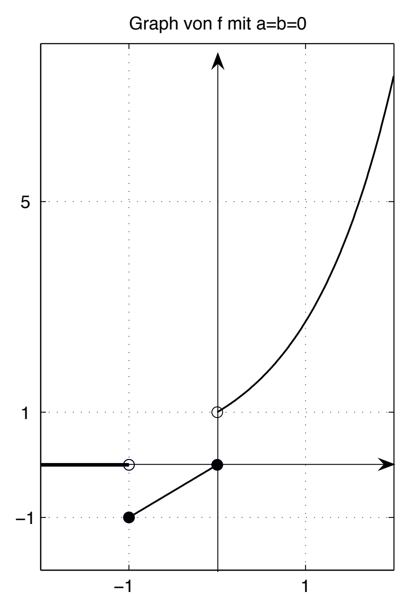
Aus

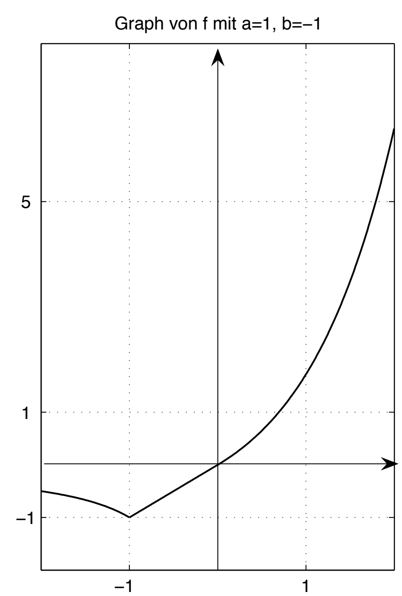
$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{a}{x} = -a \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} x = -1 = f(-1)$$

folgt, dass f für $a = 1$ stetig in -1 ist. Aus

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} x = 0 = f(0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} b + e^x = b + e^0 = b + 1$$

folgt, dass f für $b = -1$ stetig in 0 ist. Insgesamt ist f für $a = 1$ und $b = -1$ stetig auf $\mathbb{R}$.





5. Aufgabe

11 Punkte

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 17x^3 - x - \frac{e^x}{1+x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ eine Nullstelle, ein Maximum und ein Minimum besitzt. (Diese müssen nicht unbedingt angegeben werden!)

b) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = e^x(x + 2)$ im Innern des Intervalls $[-3, -1]$ keine lokalen Extrema besitzt. Besitzt g globale Extrema auf dem abgeschlossenen Intervall? Wenn ja, wo liegen diese?

---

a) Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Funktionen $x \mapsto 17x^3 - x$ und $\frac{1}{x^2+1}$ sind ebenfalls stetig auf $\mathbb{R}$. Da f somit aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist, folgt, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ und somit auch auf $[-1, 1]$ ist. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ihr Maximum und Minimum an.

Es gilt $f(0) = -1$ und $f(1) = 17 - 1 - e/2 > 17 - 1 - 2 = 16$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in (0, 1) \subseteq [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$.

Man beachte, dass hier nur die Existenz von Maximum, Minimum und Nullstelle zu zeigen war. Sie brauchen nicht berechnet zu werden.

b) Wenn g im Innern des Intervalls ein lokales Extremum x_0 hätte, so müsste $g'(x_0) = 0$ gelten.

Es ist $g'(x) = e^x(x+2)+e^x = e^x(x+3)$. Nun ist $e^x > 0$ für alle x und weiterhin ist $(x + 3) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$. Somit ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$ und g besitzt im Innern von $[-3, -1]$ keine lokalen Extrema.

Auf dem abgeschlossenen Intervall besitzt g nach dem Satz vom Maximum und Minimum globale Extrema und diese müssen auf den Rändern liegen. Da g wegen $g'(x) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$, ist g monoton wachsend. Damit ist bei $x_1 = -3$ das globale Minimum und bei $x_2 = -1$ das globale Maximum.

6. Aufgabe

10 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche sind richtig? Geben Sie jeweils an, ob die Aussage stimmt (ohne weitere Begründung!), oder geben Sie ein Gegenbeispiel (ohne weitere Begründung!) an, das die Aussage widerlegt.

a) Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen, so ist die Funktion $f \cdot g + 2g$ ebenfalls differenzierbar.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *nicht* differenzierbare Funktion, so ist die Hintereinanderausführung $f \circ g$ auf keinen Fall differenzierbar.

c) Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, so hat f an der Stelle x_0 kein lokales Extremum.

d) Bei Folgen gilt: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

e) Jede monotone und beschränkte reelle Folge konvergiert!

f) Jede konvergente Folge ist monoton wachsend oder monoton fallend!

---

a) richtig

b) falsch

Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

c) falsch

Beispiel: $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$.

d) falsch

Beispiel: $a_n = n^2, b_n = n$.

e) richtig

f) falsch

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.