Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
Doz: Böse/Gündel-vom Hofe/Krumbiegel
Ass: Kurt/ Méndez 22. Juli 2011

Juli – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 9 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>**Rechenteil**</u>

1. Aufgabe 9 Punkte

(a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z welche die Gleichung $z^2 - (2+i)z + 1 + i = 0$ erfüllen. Geben Sie die Lösung in kartesischen Koordinaten an.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z welche $z^3 = -8i$ erfüllen. Geben Sie die Lösung in Polarkoordinaten an und skizzieren Sie die Lösung in der Gaußschen Zahlenebene.

2. Aufgabe 11 Punkte

Es sei

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t}\sin(6t).$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $[0, \frac{\pi}{3}]$.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f um den Entwicklungspunkt $t_0 = 0$.

(c) Berechnen Sie $f'(0)$ und $f'(\frac{\pi}{6})$ und zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f' im Intervall $[0, \frac{\pi}{6}]$ eine Nullstelle besitzt. (Sie brauchen diese nicht zu berechnen). Zeigen Sie, dass auch T_3' eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{6}]$ besitzt (hier bezeichent T_3 das Taylorpolynom dritten Grades von f mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$).

3. Aufgabe 10 Punkte

(a) Geben Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

an.

(b) Berechnen Sie mittels einer geeigneten Substitution

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2 + 1}\,dx.$$

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-t}\sin(6t)dt.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

9 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} \sin(x), & x \in]-\infty, \frac{\pi}{2}[\\ ax+b, & x \in [\frac{\pi}{2}, \infty[. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

5. Aufgabe

9 Punkte

(a) Es sei $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit Periode 2π mit

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & t \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)\,dt$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(-t)dt$ gilt.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^{18} + 1$. Weiter sei $a > 0$ eine reelle Zahl, und g sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -(x-a)^{18} + 1$.

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und von g.

(ii) Es gilt $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{18}{19}$. (Sie müssen das nicht überprüfen). Bestimmen Sie $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ und $\int_{a-1}^{a+1} g(x)\,dx$.

6. Aufgabe

12 Punkte

(a) Entscheiden Sie, ob die untenstehenden Folgen konvergent sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.

$$(i) \quad a_n = e^{-n}\cos(2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (ii) \quad b_n = \cos(\pi n) \cdot \sin(\frac{\pi}{2}n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $a_n = (-1)^{n+1}x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $x = \frac{1}{2}$. Welche der folgenden Eigenschaften treffen in diesem Fall auf die Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, zu, und welche nicht? (1) monoton (2) beschränkt (3) konvergent.

(ii) Sei $x = -2$. Welche der folgenden Eigenschaften treffen in diesem Fall auf die Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, zu, und welche nicht? (1) monoton (2) beschränkt (3) konvergent.