Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2012
G. Bärwolff · A. Gündel-vom Hofe · F. Tröltzsch 20.07.2012

Juli – Klausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen sowie globalen Extrempunkte von f.

(b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

(a) **(6 Punkte)**
Wir berechnen zunächst die erste Ableitung von f. Es ist

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x).$$

Somit sind die Kandidaten für Extremstellen $x = 0$ und $x = 2$. Die zweite Ableitung von f ist gegeben durch

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Damit erhält man $f''(0) = 2 > 0$ und $f''(2) = -2e^{-2} < 0$. Daher ist $(0, f(0)) = (0, 0)$ ein lokales Minimum und $(2, 4e^{-2})$ ein lokales Maximum.

Für die lokalen Extrema müssen wir uns die Funktion an den Rändern anschauen. Dort gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Somit ist bei $(0, 0)$ auch das globale Minimum, f hat jedoch kein globales Maximum.

(b) **(2 Punkte)**
In (a) haben wir bereits gesehen, dass $f'(x) = xe^{-x}(2 - x)$. Damit

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (0, 2), \\ f'(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]. \end{aligned}$$

Somit ist f auf $(0, 2)$ streng monoton wachsend und auf $\mathbb{R} \setminus [0, 2]$ streng monoton fallend.

---

2. Aufgabe

12 Punkte

(a) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ mithilfe der Substitutionsregel.

(b) Berechnen Sie die Stammfunktion von $x\cos(x) + x^2$.

(c) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\, dx$ mithilfe einer Partialbruchzerlegung.

(a) **(4 Punkte)**
Dies ist ein uneigentliches Integral (in beiden Grenzen). Wir substituieren $t = -\sqrt{x}$ und erhalten damit $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Also

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = -\lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{b}} e^t\, dt \\ &= \lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} e^t\, dt = e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-\sqrt{b}} = 1. \end{aligned}$$

(b) **(4 Punkte)**
Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int (x\cos(x) + x^2)\,dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx + \tfrac{1}{3}x^3 \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + \tfrac{1}{3}x^3 + c.\end{aligned}$$

(c) **(4 Punkte)**
Zunächst führen wir die Partialbruchzerlegung durch. Es ist

$$\tfrac{3x+4}{x^2+3x+2} = \tfrac{3x+4}{(x+1)(x+2).}$$

Damit ist der Ansatz $\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$. Die Konstanten A, B lassen sich mit der Zuhaltemethode bestimmen:

$$A = \tfrac{1}{1} = 1, \qquad B = \tfrac{-2}{-1} = 2.$$

Damit erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\,dx \\ &= \ln(2) - \ln(1) + 2\big(\ln(3) - \ln(2)\big) = 2\ln(3) - \ln(2) \\ &= \ln(9) + \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(\tfrac{9}{2}).\end{aligned}$$

---

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x \sin(x)$.

(a) Bestimmen die das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass sich das Restglied für $x \in [0, 1]$ abschätzen lässt durch $|R_4(x)| \le \frac{e}{6}$.

(a) **(7 Punkte)**
Wir bestimmen zunächst die ersten drei Ableitungen und die Auswertungen im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) &= e^x \sin(x) & f(0) &= 0\\ f'(x) &= e^x\sin(x) + e^x\cos(x) = e^x\big(\sin(x)+\cos(x)\big) & f'(0) &= 1\\ f''(x) &= e^x\big(\sin(x)+\cos(x)\big) + e^x\big(\cos(x)-\sin(x)\big) = 2e^x\cos(x) & f''(0) &= 2\\ f'''(x) &= 2e^x\cos(x) - 2e^x\sin(x) = 2e^x\big(\cos(x)-\sin(x)\big) & f'''(0) &= 2.\end{aligned}$$

Damit ist das Taylorpolynom 3. Grades gegeben durch

$$T_3(x) = \tfrac{f(0)}{0!}x^0 + \tfrac{f'(0)}{1!}x^1 + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f(3)}{3!}x^3 = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

(b) **(3 Punkte)**
Für das Restglied brauchen wir noch die 4. Ableitung:

$$f^{(4)}(x) = 2e^x\big(\cos(x) - \sin(x)\big) + 2e^x\big(-\sin(x) - \cos(x)\big) = -4e^x\sin(x).$$

Damit lässt sich das Restglied für $x \in [0, 1]$ und $\xi \in [0, x]$ wie folgt abschätzen:

$$|R_3(x)| \le \left|\tfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\right| = \tfrac{4e^\xi|\sin(\xi)|}{24}x^4 \le \tfrac{e}{6}.$$

Hierbei wurde $|\sin(\xi)| \le 1$ sowie die Monotonie von e^x verwendet.

4. Aufgabe

12 Punkte

Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen konvergent sind und berechnen Sie ihre Grenzwerte:

(a) $a_n = \frac{2n^4+\cos(n)+n^2}{3n^4+n^3+7}$,

(b) $b_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$,

(c) $c_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}i\right)^n$.

(a) **(4 Punkte)**
Es ist

$$a_n = \frac{2n^4+\cos(n)+n^2}{3n^4+n^3+7} = \frac{2+\frac{\cos(n)}{n^4}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^4}}.$$

Da $|\cos(x)| \leq 1$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^4} = 0$. Somit können wir die Grenzwertsätze für konvergente Folgen anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^4}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}.$$

(b) **(4 Punkte)**
b_n erweitern wir geschickt:

$$b_n = \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Somit sieht man: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(c) **(4 Punkte)**
Wir schreiben die komplexe Folge c_n in Polardarstellung

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = \left(\frac{1}{2}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\right)\right)^n.$$

Damit ist

$$|c_n| = \left(\frac{1}{2}\left|\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\right|\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei für $a \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \begin{cases} a\cos(x), & x < \frac{\pi}{2} \\ ax^2 - 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass kein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(a) **(5 Punkte)**
Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ stetig, da beide Teilfunktion Kompositionen stetiger Funktionen sind. Die kritische Stelle ist damit nur $x = \frac{\pi}{2}$. Es gilt:

$$\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} (ax^2-1) = a(\tfrac{\pi}{2})^2 - 1,$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} a\cos(x) = 0.$$

Damit ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, wenn $a = \frac{4}{\pi^2}$ ist.

(b) **(5 Punkte)**
Wenn f differenzierbar wäre, muss erstmal f stetig sein, also $a = \frac{4}{\pi^2}$. Desweiteren ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ differenzierbar (Komposition differenzierbarer Funktionen). In $x = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir für die Differentialquotienten

$$\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)+f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{4}{\pi^2}x^2-1+0}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{8}{\pi^2}x}{1} = \frac{4}{\pi},$$

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)+f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{4}{\pi^2}\cos(x)+0}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{4}{\pi^2}\sin(x)}{1} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Damit ist f in $x = \frac{\pi}{2}$ nicht differenzierbar.

---

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(7x) + \sin(-7x) + x^3$ eine Nullstelle in $[0, \frac{\pi}{14}]$ besitzt.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass die Ungleichung

$$\ln(y) < y - 1$$

für alle $y > 1$ erfüllt ist.

(a) **(4 Punkte)**
Wir wenden den Zwischenwertsatz an. Es gilt

$$g(0) = \cos(0)+\sin(0)+0 = 1 > 0 \quad \text{und} \quad g(\tfrac{\pi}{14}) = \cos(\tfrac{\pi}{2})+\sin(\tfrac{\pi}{2})+(\tfrac{\pi}{14})^3 = -1+(\tfrac{\pi}{14})^3 < -1+(\tfrac{2}{7})^3 < 0$$

Desweiteren ist g als Komposition stetiger Funktion stetig. Daher folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass g in $]0, \frac{\pi}{14}[$ mindestens eine Nullstelle hat.

(b) **(4 Punkte)**
Setze $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$ und $b = y$ für $y > 1$. f ist differenzierbar (für $x > 0$) und daher erhalten wir mit dem Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in]1, y[$ gibt mit

$$f'(\xi) = \frac{1}{\xi} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln(y)-\ln(1)}{y-1} = \frac{\ln(y)}{y-1}.$$

Da $\xi > 1$ ist, ist $\frac{1}{\xi} < 1$, also

$$\frac{\ln(y))}{y-1} = \frac{1}{\xi} < 1 \quad \Rightarrow \ln(y) < y - 1.$$