**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II – Institut für Mathematik** SS 2012
**G. Bärwolff · A. Gündel-vom Hofe · F. Tröltzsch** 08.10.2012

# Oktoberklausur

## Rechenteil:

### 1. Aufgabe 12 Punkte

Berechnen Sie:

(a) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$.

(b) $\int\limits_0^\infty x e^{-x}\, dx$ mithilfe von partieller Integration.

(c) $\int\limits_2^3 \frac{5x^2+5x-4}{(x-1)(x^2+3x+2)}\, dx$ mithilfe einer Partialbruchzerlegung.

*Lösung:*

(a)

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx = \int\limits_0^{\ln 2} t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

(b) $u = x,\ v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1,\ v = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty x e^{-x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b x e^{-x}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left( [-x e^{-x}]_0^b - \int\limits_0^b -e^{-x}\, dx \right) \\
&= 0 - \lim_{b\to\infty} [e^{-x}]_0^b \\
&= 1
\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^3 \frac{5x^2+5x-4}{(x-1)(x^2+3x+2)}\, dx &= \int\limits_2^3 \frac{5x^2+5x-4}{(x-1)(x+2)(x+1)}\, dx \\
&= \int\limits_2^3 \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{2}{x+1}\, dx \\
&= [\ln(x-1)]_2^3 + 2[\ln(x+2)]_2^3 + 2[\ln(x+1)]_2^3 \\
&= \ln(2) - \ln(1) + 2(\ln(5) - \ln(4)) + 2(\ln(4) - \ln(3)) \\
&= \ln(2) + 2\ln(5) - 2\ln(3) \\
&= \ln\left(\frac{2\cdot 5^2}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{50}{9}\right).
\end{aligned}$$

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x}$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von $f$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_4(x)$ und $x \in [-1, 1]$ die Abschätzung $|R_4(x)| \leq \frac{1}{8}$ gilt. (Hinweis: Benutzen Sie dafür $e \leq 3$.)

*Lösung:*

(a) Es ist $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$ und $f'''(x) = -e^{-x}$. Das Taylorpolynom dritten Grades um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet damit

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

(b) Es ist $f^{(4)}(x) = e^{-x}$ und für das Restglied gilt mit $x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = \frac{e^{-\xi}}{4!}x^4 \\ &\leq \frac{3}{4!}x^4 = \frac{x^4}{8} \\ &\leq \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

*Ebenso gewertet:*

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 = \frac{-e^{-\xi}}{5!}x^5.$$

Es ist $0 < e^{-\xi} \leq 3$ und damit

$$|R_4(x)| \leq \left|\frac{3}{5!}x^5\right| = \left|\frac{x^5}{40}\right| \leq \frac{1}{40} < \frac{1}{8}.$$

## 3. Aufgabe

8 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ definierte $2\pi$-periodische Funktion. Berechnen Sie die zu $f$ gehörenden Fourierkoeffizienten.

*Lösung:* $f$ ist gerade, also gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\pi^2 = \pi$$

und für $k > 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{k}\sin(kx)|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\right) = \frac{2\cos(kx)}{\pi k^2}|_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

## Verständnisteil:

### 4. Aufgabe 10 Punkte

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1-k}{2^k} = \frac{n+1}{2^n}$$

(b) Benutzen Sie Teilaufgabe (a), um den Grenzwert der Folge

$$b_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{(-2)^n}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{2^k}$$

zu bestimmen.

*Lösung:*

(a) I.A.: $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \frac{1-k}{2^k} = \frac{1}{2^0} = 1 = \frac{0+1}{2^0}$.
I.V.: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1-k}{2^k} = \frac{n+1}{2^n}$ gelte für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}$.
I.S.: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1-k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1-k}{2^k} + \frac{1-(n+1)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2n+2-n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

(b) Nach der ersten Aufgabe ist

$$\begin{aligned}b_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{(-2)^n}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{2^k} &= -\sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{(-2)^n}{n} \frac{n+1}{2^n} \\ &= -\sin\left(\frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^n}{n}(n+1) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to_{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

da $|(-1)^n(1+\frac{1}{n})| \leq 2$ für alle $n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

### 5. Aufgabe 12 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(a) Untersuchen Sie $f$ auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie $f$ auf Differenzierbarkeit.

*Lösung:* Im Anhang.

## 6. Aufgabe

8 Punkte

$z_0 = 2 + i$ ist eine Lösung der komplexen Gleichung $z^4 = -7 + 24i$.

(a) Wieviele Lösungen $z \in \mathbb{C}$ besitzt die obige Gleichung? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die weiteren Lösungen der obigen Gleichung.

*Lösung:*

(a) $f(z) = z^4 + 7 - 24i$ hat als komplexes Polynom vierten Grades vier Nullstellen, die gerade die Lösungen der Gleichung sind.

(b) Mit $z_0 = 2 + i$ muss nun auch $z_1 := -z_0 = -2 - i$ eine Lösung der Gleichung sein, da $z_1^4 = (-1)^4 z_0^4 = z_0^4$ gilt. Analog finden wir $z_2 := i \cdot z_0 = -1 + 2i$ und $z_3 := -i \cdot z_0 = 1 - 2i$. Insgesamt erhalten wir die vier Lösungen $z_0 = 2 + i$, $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$ und $z_3 = 1 - 2i$.

Anmerkung: Die komplex Konjugierten sind keine Nullstellen, da $24i$ kein reeller Koeffizient ist. Die Existenz von vier Nullstellen ist nur im komplexen Fall gesichert.

[Alternative Lösung der Gleichung, die vorgegebene Lösung wird ignoriert, die Lösungen werden direkt bestimmt. Keine exakte Bearbeitung der Aufgabe, da die *weiteren* Lösungen der Gleichung bestimmt werden sollten:]

$$\begin{aligned} |z^4| = |-7 + 24i| &= \sqrt{(-7)^2 + (24)^2} = 25 \\ &\Rightarrow r = |z| = 25^{1/4} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 0 \Rightarrow 4\phi &= \pi + \arctan\frac{24}{-7} + 2k\pi \\ \Rightarrow \phi &= \frac{\pi + \arctan\frac{24}{-7} + 2k\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\arctan\frac{24}{-7}}{4} + \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$z_k = \sqrt{5} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\arctan\frac{24}{-7}}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

**Lösung zu Aufgabe 5:**

(i) $*$ Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $f$ als Komposition stetiger Funktionen stetig.

$*$ Stetigkeit in 0: Zu überprüfen ist ob $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ gilt.

**Weg 1:** Es ist

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left|x^2 \cos(\tfrac{1}{x})\right| \leq |x|^2 ,$$

also $\lim\limits_{x\to 0} |f(x) - f(0)| \leq \lim\limits_{x\to 0} |x|^2 = 0$, also

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Also ist $f$ auch in 0 stetig.

**Weg 2 (alternativ):** Es ist

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{beschränkt}} = 0 = f(0),$$

also ist $f$ auch in 0 stetig.

Vorsicht: Der Grenzwert von $\cos(\frac{1}{x})$ ist für $x \to 0$ existiert nicht.

Also ist $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(ii) $*$ Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $f$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar.

**Alternativ** kann die Ableitung direkt berechnet werden: Für $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + x^2(-\sin(\tfrac{1}{x}))(-\tfrac{1}{x^2}) = 2x\cos(\tfrac{1}{x}) + \sin(\tfrac{1}{x}).$$

$*$ Differenzierbarkeit im Punkt 0: Ist mittels Differentialquotient zu untersuchen: Es ist

$$\tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \tfrac{x^2\cos(\frac{1}{x})}{x} = x\cos(\tfrac{1}{x}).$$

**Weg 1:** Es ist

$$\left|\tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = \left|x\cos(\tfrac{1}{x})\right| \leq |x| ,$$

also $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| \leq \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, also

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

**Weg 2 (alternativ):** Es ist

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\cos(\tfrac{1}{x})}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

Vorsicht: L'Hospital für $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos(\frac{1}{x})}{x}$ liefert *keine Aussage*, da der Grenzwert von $\frac{2x\cos(\frac{1}{x})+\sin(\frac{1}{x})}{1}$ für $x \to 0$ nicht existiert.