Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13

Doz.: Bärwolff, Mehl, Penn-Karras 18. Feb 2013

Ass.: Altmann, Meiner, Wassmuss

Februar – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe — 10 Punkte

Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \ln(x)/x^2$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und die Nullstellen von f.

b) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to 0} f(x)$.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f. Gibt es ein globales Maximum? Gibt es ein globales Minimum?

(Hinweis: Für die zweite Ableitung gilt: $f''(x) < 0$ für $x < e^{5/2}$ und $f''(x) > 0$ für $x > e^{5/2}$.)

2. Aufgabe — 11 Punkte

Berechnen Sie, soweit möglich, folgende Integrale:

$$a) \int (x^2 - 2x)e^{-x}\,dx \qquad b) \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{4}{3}}}\,dx \qquad c) \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t + 2)(\sin t + 2t)^2\,dt.$$

3. Aufgabe — 9 Punkte

a) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $8^{\ln(e^{2x})} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 4^x}$.

b) Sei z die **komplexe** Zahl $z = \frac{1}{i+1}$. Geben Sie z in der Form $z = a + bi$ und $z = re^{i\varphi}$ an.

c) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\sin^3(x) = -\cos^2(x)\sin(x)$.

Verständnisteil

4. Aufgabe — 13 Punkte

a) Geben sie den Ansatz für die reelle sowie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$p(x) = \frac{x^2 + 4}{(x-3)(x+1)^2(x^2+1)}$$

an. (Die Koeffizienten müssen also nicht berechnet werden)

b) Überprüfen Sie die folgende Funktion anhand der Definition auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

c) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine divergente Folge mit $1 \leq b_n \leq 5$ für alle Folgenglieder. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + a_n + b_n}{2n}.$$

5. Aufgabe — 7 Punkte

a) Zeigen Sie, dass

$$1/10 \leq \ln(100) - \ln(90) \leq 1/9.$$

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_2^4 f(x)\,dx = 6$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[2,4]$ den Wert $y = 3$ annimmt.

(Hinweis: Verwenden Sie geeignete Mittelwertsätze.)

6. Aufgabe — 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x.$$

c) Benutzen Sie Teilaufgabe b), um zu zeigen, dass für das Restglied des n-ten Taylorpolynoms mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für $-1 \leq x \leq 0$ die Abschätzung $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$ gilt.