Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Bärwolff, Mehl, Penn-Karras
Ass.: Altmann, Meiner, Wassmuss

WS 12/13
02. Apr 2013

April – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe — 10 Punkte

Die Funktion $f :]3,7] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \frac{e^x}{x-3}$.

a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf globale Extrema. Bestimmen Sie ggf. die Extremstellen.

c) Stellen Sie zu f das Taylorpolynom 2. Ordnung mit Entwicklungsstelle $x_0 = 4$ auf.

2. Aufgabe — 11 Punkte

a) Bestimmen Sie alle **komplexen** Lösungen der Gleichung $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$. Die Lösungen dürfen in Polarkoordinaten angegeben werden.

b) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $|x - 2| = 3x$.

c) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der Gleichung: $\sin(2x) = \cos(x)$.

3. Aufgabe — 9 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 4-periodische, gerade Funktion. Auf $[0, 2]$ ist f gegeben durch $f(t) = 2 - t$. Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2, 2]$ und bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

Verständnisteil

4. Aufgabe — 8 Punkte

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Geben Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, für die gilt:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (n - a_n) = \infty$,

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (n - b_n) = 3$.

5. Aufgabe — 12 Punkte

a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}\, dx$ und berechnen Sie, wenn möglich, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$.

b) Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 1\,, \qquad f'(x) = -g(x)\,, \qquad g(2x) = 2f(x)g(x).$$

Zeigen Sie mit dem Konstanzkriterium, dass gilt: $2f^2(x) - f(2x) = 1$.

6. Aufgabe — 10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ als

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & , x > 0 \\ (x-1)^2 + b & , x \leq 0. \end{cases}$$

a) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist f stetig in $x = 0$?

b) Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar in $x = 0$? Benutzen Sie die Definition der Differenzierbarkeit.

c) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$?