Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2013
Doz.: Gündel-vom Hofe, Hömberg, Ortgiese 15.7.2013
Ass.: Böttle, Meiner

Juli – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

<u>**Rechenteil**</u>

1. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \dfrac{x-4}{(x-7)^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f sowie alle Nullstellen von f.

b) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ und untersuchen Sie f auf lokale Extremstellen.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ sowie an möglichen Definitionslücken.

d) Skizzieren Sie den Graphen von f.

e) Untersuchen Sie f auf globale Extremstellen und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung:

a) **(2 Punkte)** Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{7\} =]-\infty, 7[\cup]7, \infty[$. Die Funktion hat genau eine Nullstelle bei $x = 4$.

b) **(4 Punkte)** Die Ableitung lässt sich mit Hilfe der Quotientenregel bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x-7)^2 - (x-4) \cdot 2(x-7)}{(x-7)^4} \\ &= \frac{x-7-2x+8}{(x-7)^3} \\ &= \frac{1-x}{(x-7)^3}. \end{aligned}$$

Die einzige potentielle Extremstelle liegt demnach bei $x = 1$ vor.

Zur weiteren Untersuchung gibt es zwei Möglichkeiten:

- Variante 1:
  Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(x-7)^3 - (1-x)3(x-7)^2}{(x-7)^6} \\ &= \frac{2x+4}{(x-7)^4} \end{aligned}$$

  und damit

$$f''(1) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{216} > 0.$$

  Bei $x = 1$ liegt demnach ein lokales Minimum.

- Variante 2:
  Die Ableitung f' hat bei $x = 1$ und $x = 7$ Vorzeichenwechsel. Für $x < 1$ gilt $f'(x) < 0$ und für $1 < x < 7$ gilt $f'(x) > 0$. Aus Monotoniegründen besitzt f also ein lokales Minimum in $x = 1$.

c) **(3 Punkte)** Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{(x-7)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} = 0$$

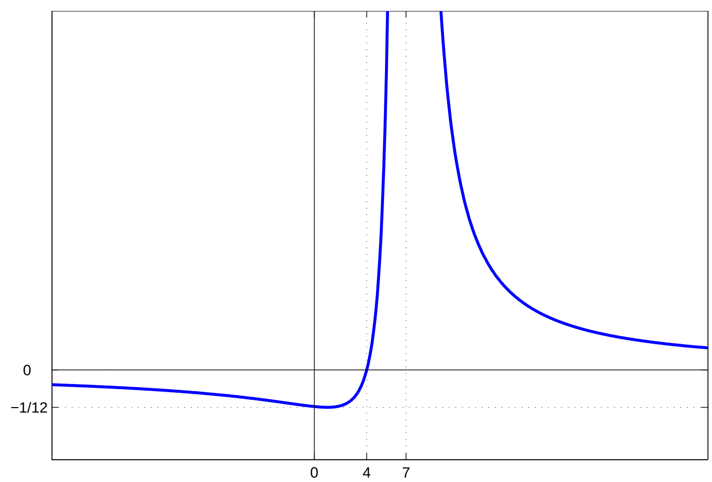
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{(x-7)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2} = 0$$

Sowie

$$\lim_{x\nearrow 7} f(x) = \lim_{x\nearrow 7} \frac{x-4}{(x-7)^2} = „\frac{3}{+0}“ = +\infty$$

$$\lim_{x\searrow 7} f(x) = \lim_{x\searrow 7} \frac{x-4}{(x-7)^2} = „\frac{3}{+0}“ = +\infty$$

d) **(1 Punkt)** Der Graph der Funktion sieht wie folgt aus.



e) **(2 Punkte)** Aufgrund von

$$\lim_{x\nearrow 7} f(x) = \lim_{x\searrow 7} f(x) = \infty$$

existiert kein globales Maximum.

Das lokale Minimum in $x = 1$ ist wegen $f(1) = -\frac{1}{12}$ und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

eine globale Extremstelle.

2. Aufgabe 8 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x^2 - 3x - 4}\,.$$

a) Führen Sie für f die Polynomdivision durch und bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung für den Rest.

b) Geben Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von f an.

Lösung:

a) **(6 Punkte)** Da der Grad des Zähler größer ist als der des Nenners, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) : (x^2 - 3x - 4) = x - 1 + \frac{5x - 5}{x^2 - 3x - 4}\,.$$

Der Nenner hat die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$ und besitzt demnach die Faktorisierung $(x+1)(x-4)$.

Für den letzten Summanden machen wir deshalb den PBZ-Ansatz

$$\frac{5x - 5}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}\,.$$

Die Zuhaltemethode liefert nun die Parameter

$$A = 2 \quad \text{und} \quad B = 3\,.$$

Zusammenfassend gilt also

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-4}\,.$$

b) **(2 Punkte)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(x - 1 + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-4}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - x}_{} + \underbrace{2\ln(|x+1|) + 3\ln(|x-4|)}_{}\,.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe 10 Punkte

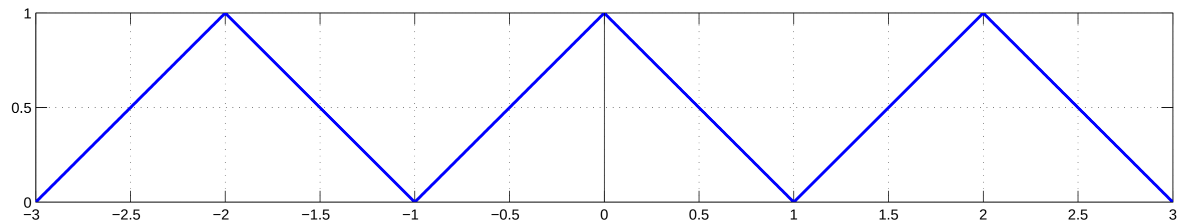
Gegeben sei die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f(t) = 1 - |t|$ für $-1 \le t < 1$ definiert ist.

a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-3, 3]$ und entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

b) Bestimmen Sie das reelle Fourierpolynom 3. Ordnung von f.

Lösung:

a) **(3 Punkte)** Die Skizze sieht wie folgt aus:



Die Funktion ist gerade (wg. der Symmetrie zur y-Achse).

b) **(7 Punkte)** Da die Funktion gerade ist, entfallen alle Sinus-Terme, d.h.

$$b_k = 0, \ \ k \in \mathbb{N}\,.$$

Für die Berechnung der a_k benutzen wir $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ mit der Periode $T = 2$.

Es gilt:

$$a_0 = \frac{4}{2}\int_0^1 (1-t)\ \mathrm{d}t = 2\Big[t - \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = 2(1-\frac{1}{2}) = 1\,.$$

Alternativ kann a_0 auch als Flächeninhalt aus der Skizze abgelesen werden.

Für $k \ge 1$ gibt es zwei Lösungswege:

- Variante 1:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{2}\int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\ \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} 2\Big[\underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \underbrace{(-1)}_{u'}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{k\pi}\Big[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{k^2\pi^2}(1-\cos(k\pi)) \\
&\Big(= \frac{2}{k^2\pi^2}(1-(-1)^k)\,.\Big)
\end{aligned}$$

- Variante 2:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(k\pi t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t)\cos(k\pi t)\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (t-1)\cos(k\pi t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\ \mathrm{d}t - \int_1^2 \underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\cos(k\pi t)}_{v'}\ \mathrm{d}t \\
&= \Big[\underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(-1)}_{u'}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\ \mathrm{d}t \\
&\quad - \Big[\underbrace{(1-t)}_{u}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\Big]_1^2 + \int_1^2 \underbrace{(-1)}_{u'}\underbrace{\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)}_{v}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{k\pi}\Big[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\Big[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\Big]_1^2 \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\big(1-\cos(k\pi)+\cos(2k\pi)-\cos(k\pi)\big) \\
&= \frac{2}{k^2\pi^2}\big(1-\cos(k\pi)\big)\,.
\end{aligned}$$

Typische Fehler:

- $a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-|t|)\cos(k\pi t)\,dt$, denn f ist als $1-|t|$ auf $[-1,1[$ definiert, aber nicht auf $[0,2[$. Auf $[1,2[$ muss man schon die Fortsetzung von f benutzen.
- Ganz ähnlich für a_0.

Das Fourierpolynom 3. Grades lautet also

$$\phi_3(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k\cos(k\pi t) \quad \text{bzw.}$$

$$\phi_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t)\,.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe
10 Punkte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-4}{2n^2+10n+8}$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$ *c)* $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ *d)* $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

a) **(2 Punkte)** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{2n^2+10n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{4}{n^2}}{2+\frac{10}{n}+\frac{8}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

b) **(3 Punkte)** Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) **(2 Punkte)** Hier gibt es zwei Lösungswege:

- Variante 1 (Kürzen):

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x\to-1} \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

- Variante 2 (l'Hopital):
  Sowohl der Zähler als auch der Nenner konvergieren gegen 0 und wir wenden die Regel von l'Hopital an:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{x^2-1} \overset{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{2x+1}{2x} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

d) **(3 Punkte)** Variante 1: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\int_4^a \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to\infty}\Big[-(x-3)^{-1}\Big]_4^a\\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a-3}+\frac{1}{4-3}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Variante 2 mit Substitution $t = x-3$, $dx = dt$: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\int_4^a \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{a\to\infty}\int_{4-3}^{a-3} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{a\to\infty}\Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{a-3}\\ &= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a-3}+\frac{1}{1}\\ &= 0+1=1\,.\end{aligned}$$

typische Fehler:

- Bei der Substitution wurde oft vergessen, die Integralgrenzen umzuformen. (Die Umformung von a zu $a-3$ ist für das Ergebnis allerdings nicht relevant, weil die Grenzwerte gleich sind: $\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a-3} = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{a} = 0$)
- Falsche Stammfunktionen, die vorgeschlagen wurden: $\ln\left((x-3)^2\right)$, $3\frac{1}{(x-3)^3}$, $\frac{1}{3}\frac{1}{(x-3)^3}$

5. Aufgabe 10 Punkte

Die Funktion f sei die Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Anfangsbedingung:

$$f'(x) = 1 + \big(f(x)\big)^2, \quad f(0) = 0\,.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialgleichung, dass f streng monoton wachsend ist.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades von f in der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Lösung:

a) **(1 Punkt)** Die Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend, wenn ihre Ableitung überall positiv ist. Es gilt

$$f'(x) = 1 + \big(f(x)\big)^2 \geq 1 > 0\,.$$

Es gibt den Punkt nicht, wenn der Bezug zur Aufgabe fehlt und nur geschrieben wurde, dass $f'(x) > 0$ ist.

b) **(9 Punkte)** Es gilt

$$\begin{aligned}
& & f(0) &= 0 \\
& & f'(0) &= 1 + \big(f(0)\big)^2 = 1 \\
f''(x) &= 2f(x)f'(x) &\Rightarrow\quad f''(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) &\Rightarrow\quad f^{(3)}(0) &= 2
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom lautet demnach

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + x + 0 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{1}{3}x^3\,.$$

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort oder geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

b) Ist $|f|$ eine stetige Funktion, so ist auch f stetig.

c) Ist $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so besitzt f ein Maximum oder ein Minimum.

d) Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad 5 besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

e) Die Gleichung $\cos(x) = x$ besitzt eine reelle Lösung in dem Intervall $[0, \pi]$.

Lösung:

a) **(2 Punkte)** Falsch.
Die durch $a_n := (-1)^n$ definierte Folge ist beschränkt aber divergent.
Nicht als richtige Begründungen akzeptiert wurde $f(x) = \sin(x)$, da dies typischer Weise eine Funktion auf $\mathbb{R}$ bezeichnet und keine Folge.

b) **(2 Punkte)** Falsch.
Ein mögliches Gegenbeispiel wäre

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mit } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

c) **(2 Punkte)** Falsch.
Ein mögliches Gegenbeispiel wäre $f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \text{ mit } f(x) = x\,.$
Nicht als richtige Begründung akzeptiert wurde, dass der Satz vom Maximum und Minimum nicht gilt (weil der Definitionsbereich ein offenes und kein kompaktes Intervall ist). Es könnte ja auch einen anderen Grund geben, warum die Aussage wahr sein sollte.

d) **(2 Punkte)** Wahr.

- Variante 1:
  Da die Koeffizienten reell sind, treten die nicht-reellen Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auf. Die Anzahl nicht-reeller Nullstellen ist deshalb immer gerade und ein Polynom vom Grad 5 besitzt genau 1, 3 oder 5 reelle Nullstellen.
  Es reicht nicht, dass ein reelles Polynom vom ungeraden Grad immer eine reelle Nullstelle hat, auch wenn das in der Vorlesung so gesagt wurde. Hier sollte man genau das in eigenen Worten begründen.
- Variante 2:
  Da die höchste auftretende Potenz ungerade ist, gilt für das Polynom f:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

  oder

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty\,.$$

  D.h. insebsondere, dass $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ existieren. Der Zwischenwertsatz liefert damit eine Nullstelle.

e) **(2 Punkte)** Wahr.
Wir betrachten die stetige Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \cos(x) - x$. Wegen $f(0) = 1 > 0$ und $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ besitzt f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, welche eine Lösung der gegebenen Gleichung liefert.
Wird die Funktion f nicht angegeben, auf die der ZWS angewendet werden soll, kann die Begründung nicht als richtig gewertet werden.