Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 13/14

Doz.: Hömberg, Kreusler, Penn-Karras, Phillip 17. Feb 2014

Ass.: Guillemard, Meiner

Februar – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f.

b) Auf welchen Teilintervallen von D ist die Funktion f monoton steigend bzw. fallend?

c) Ermitteln Sie alle globalen Minima und Maxima von $f : D \to \mathbb{R}$.

Lösung:

a) [2 Punkte] Es muss $2 - x^2 \geq 0$ gelten und somit $x^2 \leq 2$. Somit ist der maximale Definitionsbereich $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

b) [5 Punkte] Für die Ableitung von f gilt

$$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}(-2x) = \frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Für $x \in D$ gilt $f'(x) \geq 0$ genau dann, wenn $2 - 2x^2 \geq 0$, also wenn $x^2 \leq 1$. Somit ist f monoton steigend auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Für $x \in D$ gilt $f'(x) \leq 0$ genau dann, wenn $2 - 2x^2 \leq 0$, also wenn $x^2 \geq 1$. Somit ist f monoton fallend auf den Intervallen $[-\sqrt{2}, -1]$ und $[1, \sqrt{2}]$.

c) [3 Punkte] Da f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ und differenzierbar im Innern des Intervalls ist, sind die Kandidaten für globale Extremwerte die Randpunkte $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$ sowie die Nullstellen der Ableitung f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Um die globalen Extrema zu identifizieren, müssen wir die verschiedenen Werte von f an diesen Stellen bestimmen:

$$f(-\sqrt{2}) = 0 = f(\sqrt{2}), \quad f(1) = \sqrt{1} = 1, \quad f(-1) = -\sqrt{1} = -1.$$

Somit ist $x = 1$ die (einzige) globale Maximalstelle und $x = -1$ die (einzige) globale Minimalstelle und damit

$$\min f = f(1) = 1 \quad \text{und} \quad \max f = f(-1) = -1.$$

[Alternativ:] Es können auch zunächst die lokalen Extrema bestimmt werden. Mögliche Kandidaten sind die Nullstellen der Ableitung, also $x = \pm 1$. Da f monoton fallend ist, wenn $x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$, und monoton steigend, wenn $x \in [-1, 1]$, liegt bei 1 ein lokales Maximum und bei -1 ein lokales Minimum vor. Der Vergleich mit den Werten am Rand gibt das oben angegebene Ergebnis.

[Alternativ:] Es können auch zunächst die lokalen Extrema bestimmt werden. Mögliche Kandidaten sind die Nullstellen der Ableitung, also $x = \pm 1$. Eingesetzt in die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{(-4x)\sqrt{2-x^2} - (2-2x^2)\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}(-2x)}{2-x^2} = \frac{2x^3-6x}{\sqrt{2-x^2}(2-x^2)}$$

erhält man

$$f''(1) = -4 < 0 \quad \text{und} \quad f''(-1) = 4 > 0\,.$$

Also liegt bei 1 ein lokales Maximum und bei -1 ein lokales Minimum vor. Der Vergleich mit den Werten am Rand gibt das oben angegebene Ergebnis.

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-2x}dx$

b) $\displaystyle\int_0^2 x^2\cos(x^3)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\pi (2-x)\cos x\,dx$

Lösung:

a) [4 Punkte] Wir bestimmen das Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:
Diese ergibt

$$\frac{2x+2}{x^2-2x} = -\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x-2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+2}{x^2-2x}dx = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2}\right)dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -\ln|x| + 3\ln|x-2| + c.\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

b) [3 Punkte] Wir substituieren $t := x^3$. Dann gilt $\frac{dt}{dx} = (x^3)' = 3x^2$ und damit $x^2dx = \frac{1}{3}dt$.
Es folgt

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\cos(x^3)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int_0^8 \cos(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{3}\sin(t)\right]_0^8 = \frac{1}{3}\sin(8).\end{aligned}$$

c) [3 Punkte] Bei der Anwendung der Partiellen Integration leitet man den polynomiellen Faktor ab und den trigonometrischen auf (d.h. man bildet eine Stammfunktion).
Mit $f(x) = 2-x$ und $g'(x) = \cos(x)$ folgt $f'(x) = -x$ und $g(x) = \sin(x)$ und somit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (2-x)\cos x\ \mathrm{d}x &= \big[(2-x)\sin x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \big[(2-x)\sin x\big]_0^\pi - \big[\cos x\big]_0^\pi \\ &= (2-\pi)\sin\pi - (2-0)\sin 0 - \cos\pi + \cos 0 \\ &= 0 - 0 - (-1) + 1 = 2.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 3i + 3$. Berechnen Sie für z die Darstellung in Polarkoordinaten.

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 4 - 2i$ und $z_2 = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Berechnen Sie die Differenz $z_1 - z_2$ und das Produkt $z_1 z_2$ in kartesischen Koordinaten.

c) Geben Sie die Lösung der folgenden Gleichung in kartesischen Koordinaten für $z \in \mathbb{C}$ an.

$$(\sqrt{3} - i)z = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Lösung:

a) [3 Punkte] Für $z = a + ib$ ist die Polarkoordinatendarstellung $z = re^{i\phi}$ mit $r^2 = a^2 + b^2$ und $\tan(\phi) = y/x$ zu bestimmen.

Für $z = 3i + 3$ folgt also $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ und $\phi = \arctan(3/3) = \arctan(1) = \pi/4$ [alternativ kann der Winkel auch aus einer aussagekräftigen Skizze bestimmt werden]. Damit folgt $z = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

b) [4 Punkte] Wie in Aufgabenteil a) bestimmt wurde, ist $z_2 = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 3 + 3i$. Damit folgt:

$$z_1 - z_2 = 4 - 2i - (3 + 3i) = 4 - 3 - 2i - 3i = 1 - 5i$$

und

$$z_1 z_2 = (4 - 2i)(3 + 3i) = 12 + 12i - 6i - 6i^2 = 12 + 6 + 6i = 18 + 6i.$$

c) [3 Punkte] Aus der Gleichung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 6i + 2i - 2\sqrt{3}}{3 + 1} \\ &= \frac{8i}{4} \\ &= 2i\,. \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

9 Punkte

a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} & \text{falls } x > \frac{\pi}{2} \\ ax & \text{falls } x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

stetig ist.

b) Ist f für $a = 5$ in $x = \frac{\pi}{2}$ differenzierbar?

Lösung:

a) [7 Punkte] Die Teilfunktion $\frac{\cos(x)}{2x-\pi}$ ist für $x > \frac{\pi}{2}$ und die Teilfunktion ax für $x < \frac{\pi}{2}$ stetig. Damit ist f stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2\}$.

Es bleibt nur die Stetigkeit in der Übergangsstelle $x = \frac{\pi}{2}$ zu prüfen. Damit f in $x = \frac{\pi}{2}$ stetig ist, muss gelten

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x>\frac{\pi}{2}} f(x) = f(\pi/2).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} \overset{\text{L'H } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x<\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin(x)}{2} = -\frac{1}{2}, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{a\pi}{2}, \\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x>\frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2},\, x>\frac{\pi}{2}} ax = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Für Stetigkeit in $x = \pi/2$ muss somit $\frac{a\pi}{2} = -\frac{1}{2}$ gelten und damit $a = -\frac{1}{\pi}$.

b) [2 Punkte] Nach Aufgabenteil a) ist f nur dann in $x = \frac{\pi}{2}$ stetig ist, wenn $a = -\frac{1}{\pi}$ ist. Für $a = 5$ ist f also in $x = \frac{\pi}{2}$ nicht stetig. Da Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit ist, kann demnach f nicht differenzierbar sein für $a = 5$.

[Es ist alternativ auch eine Argumentation über die Definition der Differenzierbarkeit mittels Differenzenquotienten möglich.]

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R},\ f(x) = x\sin(x)$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes für die Funktion f, dass es ein $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ gibt mit

$$\sin(\xi) + \xi\cos(\xi) = 1.$$

Begründen Sie zunächst, warum der Mittelwertsatz anwendbar ist.

b) Zeigen Sie, dass es ein $\widehat{\xi} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gibt mit $f(\widehat{\xi}) = 1$.

Lösung:

a) [4 Punkte] Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar (und somit auch stetig). Deshalb kann der Mittelwertsatz für f auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ angewandt werden.

Es ist $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$. Nach dem Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) existiert ein $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = \frac{\pi/2}{\pi/2} = 1,$$

also

$$\sin(\xi) + \xi\cos(\xi) = 1.$$

b) [3 Punkte] Die Funktion f ist stetig auf $[0, \frac{\pi}{2}]$. Da $f(0) = 0 < 1 < \frac{\pi}{2} = f(\frac{\pi}{2})$, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\widehat{\xi} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $f(\widehat{\xi}) = 1$.

6. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\cos(x) + x - 1, \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

b) Hat f in $x = 0$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, was für eine Extremstelle?

Lösung:

a) [6 Punkte] Um das Taylorpolynom 2. Grades zu bestimmen, benötigen wir neben dem gegebenen Funktionswert $f(0) = 1$ zusätzlich die erste und die zweite Ableitung von f im Punkt $x_0 = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\cos(x) + x - 1, \quad f(0) = 1 && \Longrightarrow && f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -f(x)\sin(x) + f'(x)\cos(x) + 1 && \Longrightarrow && f''(0) = 1. \end{aligned}$$

Damit lautet das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)(x - x_0) + f''(0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2}\,. \end{aligned}$$

b) [2 Punkte] Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 1 > 0$, hat die Funktion f in $x = 0$ ein lokales Minimum.

7. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie reelle Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n = 5$,

c) die Folge $(a_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber nicht bestimmt divergent ist.

Lösung: Mögliche Beispiele sind:

a) Mit $b_n = n^2$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$
wie aus der Vorlesung bekannt ist.

b) Mit $c_n = 5n$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot 5n = \lim_{n\to\infty} 5 = 5.$$

c) Mit $d_n = (-1)^n n$ folgt
$$a_n d_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^n n = (-1)^n.$$
Wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, aber nicht bestimmt divergent.

Bei nicht aus der Vorlesung bekannten Folgen ist eine Begründung zur Konvergenz beziehungsweise Divergenz anzugeben.