1. Aufgabe **(6 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass folgende Gleichheit gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Lösung: [6P]

Ind. Anfang: $n = 2$

$$\begin{aligned} \text{l.S.} &= \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \\ \text{r.S.} &= 1 - \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{2!} &\Leftrightarrow \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Ind. Schluss:

I.V.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}$ für ein n (bel. aber fest).

I.B.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ bzw: "Gilt auch für $n+1$."

Beweis:

1. Alternativ:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{n+1}{n!(n+1)} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= 1 + \frac{-(n+1)+n}{(n+1)!} \\ &= 1 + \frac{-1}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

2. Alternativ:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{(n+1)!}{n!(n+1)!} + \frac{nn!}{(n+1)!n!} \\ &= 1 - \frac{(n+1)! - nn!}{n!(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{n!(n+1) - nn!}{n!(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{n!((n+1) - n)}{n!(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

2. Aufgabe **(13 Punkte)**

(a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung gilt, und geben Sie die Lösungsmenge in Intervallschreibweise an.

$$2 - 2|x-1| > x.$$

(b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 = -1$.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $\tan(x) = \sin(2x)$.

Lösung:

(a) [5P]

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{falls } x-1 \geq 0 \\ 1-x, & \text{falls } x-1 < 0 \end{cases}$$

1. Fall : $x - 1 \geq 0$, wobei $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\begin{aligned} 2-2|x-1| &> x \\ 2-2(x-1) &> x \\ 2-2x+2 &> x \\ 4 &> 3x \\ \frac{4}{3} &> x \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1, x < \frac{4}{3}\} = [1, \frac{4}{3}[$$

2. Fall: : $x - 1 < 0$, wobei $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$\begin{aligned} 2-2|x-1| &> x \\ 2+2(x-1) &> x \\ 2+2x-2 &> x \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1, x > 0\} =]0, 1[$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [1, \frac{4}{3}[\cup]0, 1[=]0, \frac{4}{3}[$$

(b) [3P]

1. Alternativ:

Sei $z = |z|e^{i\phi}$ die eulersche Formel des z, dann ergibt sich

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow |z|^3 e^{i3\phi} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\phi = 2k\pi + \pi \end{cases} , k = 0, 1, 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \phi = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases} , k = 0, 1, 2$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{ e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{\frac{i5\pi}{3}} \right\}$$

2. Alternativ:

Mit $-1 = e^{i\pi} = e^{i3\pi} = e^{i5\pi}$

$$z_1 = e^{i\pi/3} \qquad z_2 = e^{i\pi} \qquad z_3 = e^{i5\pi/3}$$

3. Alternativ:
Es ist klar, dass -1 eine Lösung der Gleichung ist. Aus der Polynomdivision

$$z^3 + 1 : z + 1 = z^2 - z + 1$$

können wir die restliche Lösungen bestimmen, weil sie die Lösungen der Gleichung $z^2 - z + 1 = 0$ sind. Aus der $p - q-$Formel ergibt sich

$$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Also
$$\mathbb{L} = \{-1, \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\}.$$

(c) [5P]
1. Alternativ:

$$\begin{aligned} \tan(x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x \cos x \\ &\Leftrightarrow \sin x = 2\sin x \cos^2 x \\ &\Leftrightarrow \sin x - 2\sin x \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ oder } 2\cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Also

$$\mathbb{L}_1 = \{x = k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

- $2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \text{ oder } \cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \text{ oder } \cos x = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Also
$$\mathbb{L}_2 = \{k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Insgesamt, für $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \{k\pi, k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi - \frac{\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

2. Alternativ:
Aus der Identität $\sin(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ ergibt sich

$$\tan x = \sin(2x) \Leftrightarrow \tan x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \Leftrightarrow \tan x(1 + \tan^2 x) = 2\tan x$$

$$\Leftrightarrow \tan x(\tan^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \text{ oder} \\ \tan x = 0 \text{ oder} \\ \tan x = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z}, \text{ oder} \\ x = k\pi, & k \in \mathbb{Z}, \text{ oder} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Aufgabe **(11 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ für $x > 0$. Bestimmen Sie die lineare Approximation von f in $x_0 = 1$, also das Taylorpolynom T_1 mit Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

(b) Geben Sie das zugehörige Restglied $R_1(x)$ nach Lagrange an. Bestimmen Sie das Vorzeichen des Restgliedes für $x \in]0, 2]$.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x}$.

(d) Skizzieren Sie f und T_1 auf $]0, 3]$. Beschriften Sie eventuell auftretende Nullstellen und Extremstellen von f in diesem Intervall.

Lösung:

(a) [2P] 1. Ableitung berechnen und in $x_0 = 1$ auswerten:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x} & &\Longrightarrow f(1) = 0 \\ f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} & &\Longrightarrow f'(1) = 1, \end{aligned}$$

Taylorpolynom aufstellen:

$$T_1(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = 0 + (x-1) = x - 1.$$

(b) [4P] 2. Ableitung berechnen:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= \left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)' = \frac{(1-\ln(x))'\,x^2 - (1-\ln(x))\,(x^2)'}{x^4} \\ &= \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2\,(1-\ln(x))\,x}{x^4} = \frac{-x - 2x + x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

Restglied angeben mit c zwischen 0 und x:

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-1)^2 = \frac{-3+2\ln c}{2!c^3}(x-1)^2.$$

Für $x \in]0, 2] \setminus \{1\}$ ergibt sich $c \in \begin{cases}]1, x[\,, & \text{falls } 1 < x < 2, \\ ]x, 1[\,, & \text{falls } 0 < x < 1. \end{cases}$ Deswegen $c \in]0, 2[\,.$

1. Alternativ:

$$c < 2 < e \overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow} -3 + 2\ln c < -3 + 2\ln e = -3 + 2 = -1 < 0$$

also

$$R_1(x) = \frac{-3+2\ln c}{2!c^3}(x-1)^2 < \frac{-1}{2!c^3}(x-1)^2 \leq 0.$$

2.Alternativ

Für $c \in]0,2[$ sowie $x \in]0,2] \setminus \{1\}$, ergibt sich $c^3 > 0$ und $(x-1)^2 > 0$.

- Deswegen

$$R_1(x) > 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln(c) > 0 \Leftrightarrow \ln(c^2) > 3 \Leftrightarrow c^2 > e^3.$$

Aber $4 > c^2 > e^3 \overset{(e>2)}{>} 2^3 = 8$. Widerspruch!

- oder

$$R_1(x) < 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln(c) < 0 \Leftrightarrow \ln(c^2) < 3 \Leftrightarrow c^2 < e^3.$$

Die letzte Ungleichung wahr ist, weil $c^2 < 2^2 \overset{(2<e)}{<} e^2 < e^3$ gilt.

Also gilt es $R_1(x) < 0$ für jedes $x \in]0,2] \setminus \{1\}$, deswegen $R_1(x) \leq 0$, für $c \in]0,2[$ und $x \in]0,2]$.

3.Alternativ

- Falls $x \in]0,1[$ und $c \in]0,1[$, ergibt sich

$$\ln c < 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln c < 0 \Leftrightarrow R_1(x) < 0,$$

weil $(x-1)^2 > 0$ und $c^3 > 0$ sind.

- Falls $x \in]1,2]$ und $c \in]1,2[$, ergibt sich, wegen $x \mapsto \ln(x)$ streng mon. steigend ist,

$$\begin{aligned} \ln 1 < \ln c < \ln 2 \Leftrightarrow \quad & 0 < \quad 2\ln c \quad < \quad 2\ln 2 \\ \Leftrightarrow & -3 < -3 + 2\ln c < -3 + 2\ln 2 = -\ln(e^3) + \ln(c^2) < 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\ln(c^2) < \ln(e^3)$ ist wahr, weil $c^2 < 4 < e^2 < e^3$ wahr ist und die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ strneg monoton Steigend ist. Weil $(x-1)^2 > 0$ und $c^3 > 0$ sind, ergibt sich $R_1(x) < 0$.

- Falls $x = 1 \Rightarrow c = 1$ und $R_1(1) = 0$.

Insgesamt ergibt sich $R_1(x) \leq 0$.

(c) [1P]

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} (\ln x)\,\frac{1}{x} = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$$

Regel von l'Hospital kann nicht angewendet werden!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\text{“l'Hospital”}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \ (\text{statt } -\infty)$$

(d) [4P]

T_1 skizzieren.

Grenzwert richtig (bzw. wie zuvor berechnet) skizzieren.

Bei f: Nullstelle aus Funktion ablesen: $\frac{\ln x}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Für die Extremstelle:

• Erste Ableitung null für $x = e$ ablesen aus Teil a). Einsetzen in 2. Ableitung aus b) ergibt $-3 + 2 < 0$ im Zähler, Nenner positiv, also lokales Maximum

oder

• Vorzeichen der 1. Ableitung für $x < e$ und $x > e$ bestimmen / abschätzen.

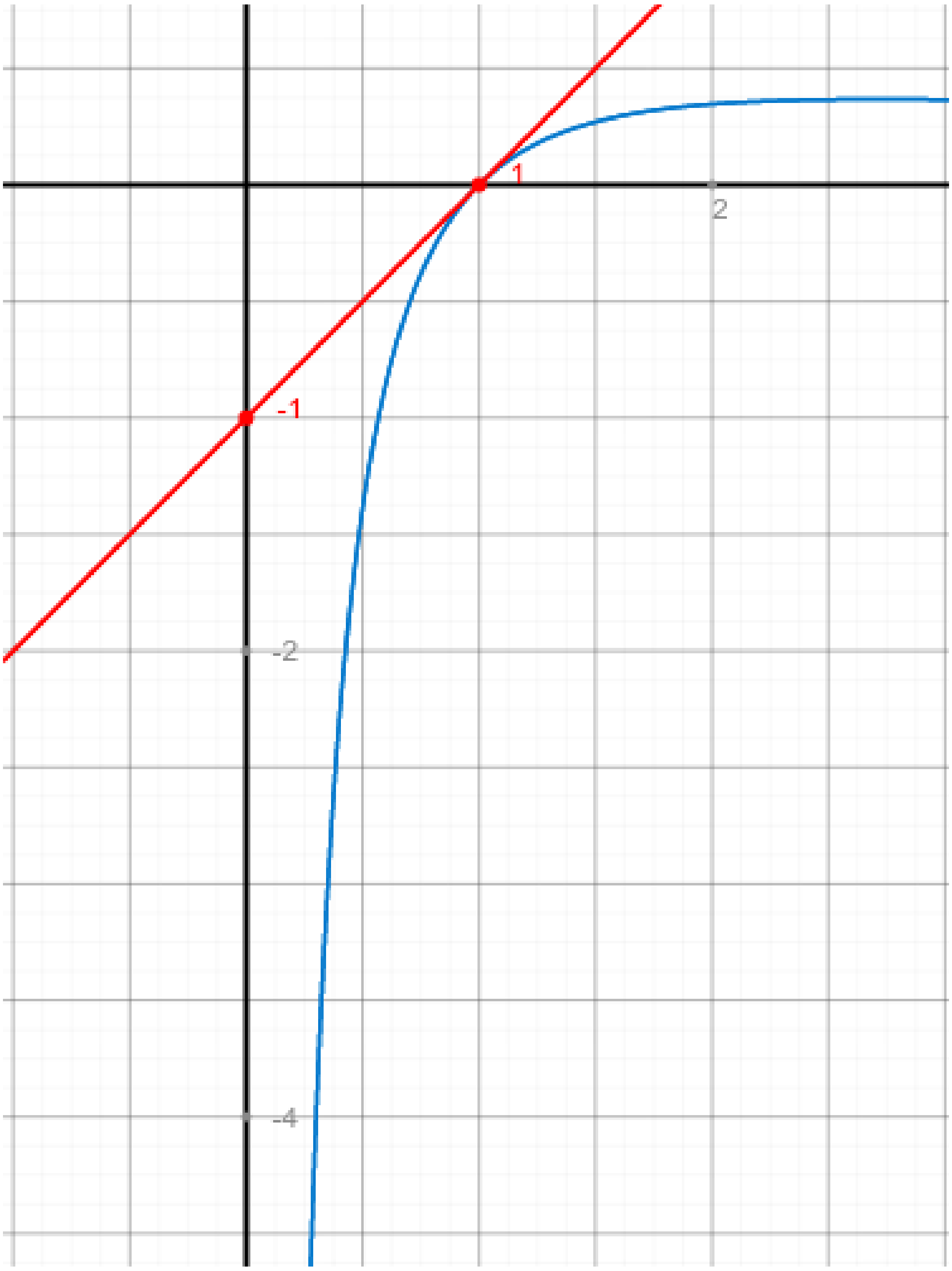

Abbildung 1: Die Graphen von f und T_1

4. Aufgabe **(8 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)}$. Geben Sie die Faktorisierung des Nenners an, wie sie zur **reellen** Partialbruchzerlegung benötigt wird.

(b) Geben Sie die Faktorisierung des Nenners von f an, wie sie zur **komplexen** Partialbruchzerlegung benötigt wird.

(c) Gegeben ist die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2(3+x^2)}$. Geben Sie die Ansätze für die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung von $g(x)$ an.

Hinweis: Die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung sollen **nicht** berechnet werden.

Lösung:

(a) [2P] Zerlegung des Nenners $(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)$ durch Hinsehen: Binomische Formel für 1. Faktor, und mit $2 = 1+1$ auch im 2. Faktor. $(x^2+2x+1)(x^2+2x+2) = (x+1)^2((x+1)^2+1)$. 2. Faktor über $\mathbb{R}$ irreduzibel, also reelle Zerlegung fertig.

(b) [2P] Zerlegung für die komplexe PBZ mit Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned}(x+1)^2+1 &= 0\\ (x+1)^2 &= -1\\ x+1 &= \pm\sqrt{-1}\\ x &= -1 \pm i\end{aligned}$$

oder p-q-Formel

$$x^2+2x+2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1^2-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

Also $(x^2+2x+1)(x^2+2x+2) = (x+1)^2(x-(-1-i))(x-(-1+i))$

(c) [4P] Ansatz reele PBZ

$$\frac{1}{(x-3)^2(3+x^2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{3+x^2}$$

Ansatz komplexe PBZ, Faktorisierung von $3+x^2$ mit p-q-Formel $x_{1,2} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$ oder ohne

$$3+x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{3}.$$

oder direkt via 3. Binomi, aber das macht ja keiner:

$$\begin{aligned}3+x^2 &= (3-(ix)^2) = (\sqrt{3}-ix)(\sqrt{3}+ix) \overset{1=-i^2}{=} -(i\sqrt{3}+x)(i\sqrt{3}-x)\\ &= (i\sqrt{3}+x)(-i\sqrt{3}+x) = (x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})\end{aligned}$$

Dann der Ansatz:

$$\frac{1}{(x-3)^2(3+x^2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-i\sqrt{3}} + \frac{D}{x+i\sqrt{3}}$$

5. Aufgabe **(11 Punkte)**

Gegeben ist die beliebig oft differenzierbare Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(\sin(x))$.

(a) Besitzt f auf $[0, \pi]$ ein globales Minimum und / oder ein globales Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort ohne zu Rechnen.

(b) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf $[0, \pi]$.

(c) Geben Sie das Bild $f([0, \pi])$ in Intervallschreibweise an.

Lösung:

(a) [2P] Satz von der Existenz des Minimums und des Maximums. f ist stetig als Nacheinanderausführung der stetigen Funktionen Sinus und Cosinus. Der Definitionsbereich / das Intervall $[0, \pi]$ ist abgeschlossen / kompakt.

(b) [8P]

1. Alternativ:

Ableitung und Nullstellen der Ableitung

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\sin(x)) \\ f'(x) &= (\cos(\sin(x)))' = \cos'(\sin(x))\sin'(x) = -\sin(\sin(x))\cos(x) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \sin(\sin(x)) = 0 \text{ oder } \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ oder } \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \{0, \pi/2, \pi\} \end{aligned}$$

Tabelle für das Monotonieverhalten

x	0	$]0, \pi/2[$	$\pi/2$	$]\pi/2, \pi[$	π
$-\sin(\sin(x))$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

2. Alternativ:

2. Ableitung berechnen und in $\pi/2$ auswerten.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(\sin(\sin(x))' \cos(x) - \sin(\sin(x))(-\sin(x)) \\ &= -(\sin'(\sin(x))\sin'(x))\cos(x) + \sin(\sin(x))\sin(x) \\ &= -\cos(\sin(x))\cos^2(x) + \sin(\sin(x))\sin(x) \\ f''(\pi/2) &= -\cos(\sin(\frac{\pi}{2}))\cos^2(\frac{\pi}{2}) + \sin(\sin(\frac{\pi}{2}))\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= -\cos(1)\cdot 0 + \sin(1)\cdot 1 \\ &= \sin(1) > 0 \end{aligned}$$

Also ist $\pi/2$ lokale Minimalstelle.

Rand betrachten: $f(0) = \cos(\sin(0)) = \cos(0) = 1$, $f(\pi) = \cos(\sin(\pi)) = \cos(0) = 1$.

Also ist $x = \pi/2$ lokale und globale Minimalstelle, und $x = 0, x = \pi$ sind (lokale und) globale Maximalstellen.

(c) [1P]

1. Alternativ:

$$f([0, \pi]) = [\min f(x), \max f(x)] = [f(\pi/2), f(0)] = [\cos(1), 1]$$

2. Alternativ:

$$f([0, \pi]) = \cos(\sin([0, \pi])) = \cos([0, 1]) = [\cos(1), \cos(0)] = [\cos(1), 1],$$

weil $1 < \frac{\pi}{2}$ gilt und cos streng monoton fallend auf $[0, 1]$ ist.

6. Aufgabe **(11 Punkte)**

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int x\cos(x+1)\ \mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{(2t-3)^4}\ \mathrm{d}t$ (c) $\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Lösung:

(a) [4P] Ansatz mit Partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int x\cos(x+1)\ \mathrm{d}x &= x\sin(x+1) - \int \sin(x+1)\ \mathrm{d}x + c\\ &= x\sin(x+1) + \cos(x+1) + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(b) [4P] Mit Substitution, , $s = 2t-3$, $ds = 2dt$ bzw $\frac{1}{2}ds = dt$. Für die Grenzen: $0 \to -3$, $1 \to -1$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(2t-3)^4}\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} \frac{1}{s^4}\ \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}s^{-3}\right]_{-3}^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}(-1)^{-3} - \frac{-1}{3}(-3)^{-3}\right] = \frac{1}{6}\left[1 - \frac{1}{27}\right] = \frac{13}{81}\end{aligned}$$

(c) [3P] Mit Substitution, , $t = \arctan(x)$ und $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int \arctan(x)\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\arctan^2(x) + c, c \in \mathbb{R}$$