**1. Aufgabe** **(14 Punkte)**

(a) Leiten Sie die folgenden Funktionen ab:

$$f(x) = (2x^2 + \sin x)\sqrt{x}, \qquad g(x) = \sqrt{1 + e^x + x}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ stetig ist, wobei

$$h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & x > 0 \\ 12x + \sin x, & x \leq 0 \end{cases}.$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2 + \cos x}{2x + \sin x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

(d) Beweisen Sie, dass für alle $n \geq 1$ folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{n-1}{n+1}.$$

**Lösung:**

(a) [2P] Es gilt

$$f'(x) \overset{\text{(PR)}}{=} (2x^2 + \sin x)'\sqrt{x} + (2x^2 + \sin x)(\sqrt{x})' = \big(4x + \cos x\big)\sqrt{x} + \frac{2x^2 + \sin x}{2\sqrt{x}},$$

$$g'(x) = \big(\sqrt{1 + e^x + x}\big)' \overset{\text{(KR)}}{=} \frac{(1 + e^x + x)'}{2\sqrt{1 + e^x + x}} = \frac{e^x + 1}{2\sqrt{1 + e^x + x}}.$$

(b) [3P] Es muss gelten $h(0) = \lim_{x\to 0} h(x)$. Das ist äquivalent zu $h(0) = \lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$. Es gilt $h(0) = 0 + \sin(0) = 0$.
Die erste Teilfunktion, d.h. $\ln(x^2+1)$, ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Verknüpfung stetiger Funktionen und $x^2 + 1 > 0$). Damit ist $\ln(x^2+1)$ insbesondere im Punkt 0 stetig, d.h.

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0+} \ln(x^2+1) = \ln(1) = 0 = h(0).$$

Auch die zweite Teilfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}$. Daher gilt

$$\lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0-} (12x + \sin x) = 0 + \sin(0) = 0 = h(0).$$

(c) [4P] Wir substituieren $t := 2x + \sin x + 1$ mit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 + \cos x$ und "$\mathrm{d}t = (2 + \cos x)\mathrm{d}x$". Grenzen: wenn $x = 0$ ist $t = 1$ und wenn $x = \frac{\pi}{2}$ ist $t = \pi + 2$ . Deswegen gilt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2 + \cos x}{2x + \sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\pi+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|t|\big]_1^{\pi+2} = \ln(\pi+2) - \ln(1) = \ln(\pi+2).$$

(d) [5P] Sei $A(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{n-1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**Induktionsanfang:** Für $n = 1$ gilt

$$\text{linke S. von } A(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{1(1+1)} = 1 = 1 + \frac{1-1}{1+1} = \text{rechte S. von } A(1).$$

**Indduktionsschluss:**
Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges aber festes $m$ gilt $A(m)$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{m-1}{m+1}. \tag{IV}$$

Induktionsbeweis: Wir zeigen, dass wenn $A(m)$ gilt, dann gilt auch $A(m+1)$, d.h.,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{m}{m+2}. \tag{1}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)} \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} 1 + \frac{m-1}{m+1} + \frac{2}{(m+1)(m+2)} \\
&= 1 + \frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m+2)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)} \\
&= 1 + \frac{m^2+m}{(m+1)(m+2)} \\
&= 1 + \frac{m(m+1)}{(m+1)(m+2)} \\
&= 1 + \frac{m}{m+2}
\end{aligned}$$

**2. Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ auf dem Definitionsbereich $D_f = ]2, \infty[$.

(a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von $f$ auf dem gesamten Definitionsbereich.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Minimal- und Maximalstellen.

(c) Existiert auch ein globales Minimum bzw. Maximum? Bergründen Sie ihre Antwort.

**Lösung:**

(a) [4P] Es gilt

$$f'(x) \overset{(\text{QR})}{=} \frac{(x^2)'(x-2) - x^2(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(2x-4-x)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Für das Monotonieverhalten untersuchen wir das Vorzeichen der Ableitung:

| $x \in$ | $]2,4[$ | $\{4\}$ | $]4,\infty[$ |
|---|---|---|---|
| Vorzeichen von $x$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Vorzeichen von $x-4$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Vorzeichen von $(x-2)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Vorzeichen von $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Monotonieverhalten von $f(x)$ | $\searrow$ | $f(4) = 8$ | $\nearrow$ |

Die Funktion $f$ ist also streng monoton fallend auf $]2,4[$ und streng monoton wachsend auf $]4,\infty[$.

(b) [2P] Es gilt $f'(x) = 0$ nur für $x = 4$ .

- **1. Alternative:** Wegen der Monotonie nimmt die Funktion $f$ bei 4 ein lokales Minimum an.
- **2. Alternative:** Mithilfe der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x^2-4x)(x-2)}{(x-2)^4}, \quad f''(4) = 1 > 0.$$

Es gibt kein lokales Maximum.

(c) [2P] Es gilt

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Deswegen, gibt es kein globales Maximum und die Funktion $f$ nimmt bei 4 das globale Minimum an.

## 3. Aufgabe (11 Punkte)

(a) Wandeln Sie $z = -2 + 2i$ in Polarkoordinaten um und berechnen Sie damit $z^4$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

(b) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Gleichung $(\sin(2x) - 1)(\cos^2(x) - 1) = 0$.

(c) Finden Sie alle **reellen** Lösungen der Gleichung $4 = \sqrt{2^{4(x-1)}}$.

(d) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(\frac{2}{n})\sin(2n)$ auf Konvergenz.

**Lösung:**

(a) [3P] Es gilt $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $r^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 = 2^4 2^2 = 2^6 = 64$. Für den Winkel ergibt sich

$$\varphi = \arctan(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Also gilt

$$z = -2 + 2i = re^{i\varphi} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Damit folgt

$$z^4 = r^4 \mathrm{e}^{i4\frac{3\pi}{4}} = 64\,\mathrm{e}^{i3\pi} = 64\,\mathrm{e}^{i\pi} = -64.$$

(b) [3P] Es muss entweder $\sin(2x) - 1 = 0$ oder $\cos^2(x) - 1 = 0$ gelten.

- Für den ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} \sin(2x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  Wir definieren $L_1 := \{k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

- Für den zweiten Fall gilt

$$\cos^2(x) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

  Wir definieren $L_2 := \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Somit ergibt sich für die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2$.

(c) [2P] Es gilt

$$4 = \sqrt{2^{4(x-1)}} = 2^{\frac{1}{2}4(x-1)} = 2^{2(x-1)} = 4^{x-1}.$$

Wegen der Injektivität der Potenzfunktion folgt $1 = x - 1$, also $x = 2$.

(d) [3P] Es gilt $|\sin(2n)| \leq 1$. Deswegen gilt $0 \leq |a_n| \leq \left|\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right|$. Wegen der Stetigkeit der Betrags- und Sinusfunktion folgt mit dem Sandwichkriterium

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)\right| = |\sin(0)| = 0,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Alternativ: Es handelt sich um das Produkt einer Nullfolge ($\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{2}{n}) = 0$) und einer beschränkten Folge ($|\sin(2n)| \leq 1$), sodass $a_n$ auch eine Nullfolge sein muss.

**4. Aufgabe** **(10 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f\colon ]-\frac{1}{2},\infty[\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=\ln(2x+1)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2$ zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0=0$.

(b) Zeigen Sie, dass der Fehler $|f(x)-T_2(x)|$ für $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, dass $f(x)<2x$ für alle $x>0$.

**Lösung:**

(a) [3P] Wir berechen zunächst die Ableitungen von $f$,

$$f'(x)\overset{\text{(KR)}}{=}\frac{2}{2x+1},\qquad f''(x)\overset{\text{(KR)}}{=}-\frac{4}{(2x+1)^2}.$$

Das Taylorpolynom zweiten Grades mit Entwicklungspunkt $x=0$ ist gegeben durch

$$T_2(x):=f(0)+\sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Mit $f(0)=0,\ f'(0)=2$ und $f''(0)=-4$ gilt dann

$$T_2(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=2x-2x^2.$$

(b) [4P] Die Funktion $\ln(2x+1)$ ist 3−mal differenzierbar auf $]\frac{1}{2},\infty[$ mit

$$f^{(3)}(x)\overset{\text{(KR)}}{=}\frac{16}{(2x+1)^3}.$$

Deswegen ist die Differenz $f(x)-T_2(x)$ gleich mit dem Lagrangeschen Restglied $R_2(x)$. Für jedes $x\in]-\frac{1}{2},\infty[\setminus\{0\}$ existiert also ein $\xi$ zwischen 0 und $x$, sodass

$$f(x)-T_2(x)=R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3=\frac{\frac{16}{(2\xi+1)^3}}{3!}x^3=\frac{8}{3(2\xi+1)^3}x^3.$$

Aus $x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ folgt, dass $\xi\in]0,\frac{1}{2}[$ gilt. Der Restglied-Term wird maximal, wenn wir für $x$ den Wert $\frac{1}{2}$ und für $\xi$ den Wert 0 einsetzen:

$$|f(x)-T_2(x)|=|R_2(x)|\le\max_{\xi\in[0,\frac{1}{2}]}\left|\frac{8}{3(2\xi+1)^3}\right|\max_{x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}\left|x^3\right|<\frac{8}{3(0+1)^3}\frac{1}{2^3}=\frac{1}{3}.$$

(Die Funktion $]-\frac{1}{2},\infty[\ni\xi\longmapsto\frac{8}{3(2\xi+1)^3}\in\mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton fallend und die Funktion $]-\frac{1}{2},\infty[\ni x\longmapsto x^3\in\mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend.)

(c) [3P] Sei $g:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ definiert durch $g(x)=\ln(2x+1)-2x$. Dann gilt

$$g'(x)=\frac{2}{2x+1}-2.$$

Man beachte, dass $g'(x)<0$ für $x>0$. Wir wenden den Mittelwertsatz auf dem Intervall $[0,x]$ (für jedes $x>0$) an. Es existiert also ein $\xi\in]0,x[$ mit

$$0>g'(\xi)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(2x+1)-2x-\ln 1}{x}+0=\frac{\ln(2x+1)-2x}{x}.$$

Dabei gilt $0>g'(\xi)$, da auch $\xi>0$. Multiplikation mit $x>0$ liefert dann $0>g(x)$, also

$$g(x)=\ln(2x+1)-2x=f(x)-2x<0$$

für alle $x>0$.

**5. Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{-x}\ln x$.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f$.

(b) Untersuchen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes, dass $f$ im Intervall $[1, e]$ eine kritische Stelle besitzt, d.h., eine Stelle $\xi$ mit $f'(\xi) = 0$.

**Lösung:**

(a) [1P] Die Funktion $f$ ist überall definiert, wo auch der ln definiert ist, also $D_f = ]0, \infty[$.

(b) [3P] Es gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} \mathrm{e}^{-x} = 1$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$, zusammen also

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\infty.$$

Weiter gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$. Deswegen muss die Regel von Bernoulli/de l'Hospital angewendet werden,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\mathrm{e}^x} = 0.$$

(c) [4P] Die erste Ableitung von $f$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{-x}\ln x\right)' \overset{\text{(PR)}}{=} -\mathrm{e}^{-x}\ln x + \mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x}.$$

Diese Funktion ist stetig auf dem gesamten Definitionsbereich, da alle Teilfunktionen (ln, $e^x$, $x^{-1}$) stetig sind. Wir können also den Zwischenwertsatz für $f'$ auf dem Intervall $[1, \mathrm{e}]$ anwenden.

**1. Alternative:** Wir setzen $x = 1$ und $x = \mathrm{e}$ ein,

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\mathrm{e}^{-1}\ln 1 + \mathrm{e}^{-1}\frac{1}{1} \overset{\ln 1 = 0}{=} \frac{1}{\mathrm{e}} > 0, \\ f'(\mathrm{e}) &= -\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\ln \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\frac{1}{\mathrm{e}} \overset{\ln \mathrm{e} = 1}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\big(-1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\big) < 0, \quad \text{weil } 1 < \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Somit existiert ein $\xi \in ]1, \mathrm{e}[$, sodass $f'(\xi) = 0$, aus ZWS.

**2. Alternative:** Es gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$\mathrm{e}^{-x}\ln x = \mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x\ln x = 1.$$

Die Funktion $g(x) := x\ln x$ ist stetig und $g(1) = 0$, $g(e) = e$. Die Funktion $g$ nimmt im Intervall $[1, e]$ also alle Werte zwischen 0 und $e$ (also insbesondere 1) an . Somit existiert eine kritische Stelle für $f$.

**6. Aufgabe** **(9 Punkte)**

Wir betrachten die gerade 2-periodische Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & 0 < t \leq 1 \\ 1-t, & -1 < t \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, die Integrale

$$\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Berechnen Sie alle Fourierkoeffizienten von $f$.

**Lösung:**

(a) [4P] Für das erste Integral gilt

$$\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big|_0^1 = \frac{1}{k\pi}[\sin(k\pi) - \sin(0)] = 0.$$

Für das zweite Integral gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{k\pi}\int_0^1 t\big(\sin(k\pi t)\big)'\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{k\pi}\Big[t\sin(k\pi t)\Big]\Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k\pi}\big[1\sin(k\pi) - 0\sin(0)\big] - \frac{1}{(k\pi)^2}[-\cos(k\pi t)]\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{(k\pi)^2}[\cos(k\pi t)]\Big|_0^1 = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade}, \\ -\frac{2}{(k\pi)^2}, & \text{für } k \text{ ungerade}. \end{cases}\end{aligned}$$

(b) [5P] Die Funktion ist $2-$periodisch. Deswegen ist $T = 2$ und $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Da die Funktion $f$ gerade ist, gilt $b_k = 0$.
Berechnung $a_0$ (also $k = 0$):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^1 (1+t)\,\mathrm{d}t = 2\Big[t + \frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 0\right) = 3.$$

Für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 (1+t)\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1 t\cos(k\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ gerade}, \\ -\frac{4}{(k\pi)^2}, & \text{für } k \text{ ungerade}. \end{cases}\end{aligned}$$