Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, W. Stannat
Assistenten: B. Schröter, O. Sète

2017 SoSe
26. Juli 2017

Modulprüfung
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“
Teil: „Analysis I“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem beidseitig handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf A4 Blättern ab. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden. Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit für die Teilleistung im Fach „Analysis I“ beträgt 90 Minuten.

Die Gesamtklausur ist mit 45 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile (Analysis I und Lineare Algebra) der Klausur mindestens 40% der Punkte erreicht werden.

☐ **Ich habe bereits nach alter Prüfungsordnung die Modulklausur „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“ bestanden/anerkannt bekommen.**

Korrektur Analysis I

1	2	3	4	5	6	Σ

Punktzahl: **Analysis I** **Lineare Algebra** **Gesamtpunktzahl**

Σ

Σ

Σ

1. Aufgabe (8 Punkte)

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 \sin(x)$,

b) $f(x) = \ln(1 + e^{4x})$,

c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f(x) = \ln(1 + x) + x^2$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und das zugehörige Restglied. Schätzen Sie das Restglied auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ab.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals in a) und die allgemeine Stammfunktion in b) und c):

a) $\displaystyle\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\, dx$, b) $\displaystyle\int e^{3x}(1 + e^{3x})^4\, dx$, c) $\displaystyle\int 2x \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Sei $z = i\pi e^{-i\pi}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von z, sowie den Betrag und das Argument von z.

b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 16i$.

c) Finden Sie ein Polynom 4. Grades mit reellen Koeffizienten und den Nullstellen i und $2i$.

6. Aufgabe (11 Punkte)

Sei $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x}, & 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} f(x)$.

b) Bestimmen Sie das $a \in \mathbb{R}$, für das f stetig in 0 ist, und zeigen Sie, dass f damit stetig auf ganz $[0, \frac{1}{2}]$ ist.

c) Zeigen Sie: f ist streng monoton fallend auf $]0, \frac{1}{2}[$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Nachweis verwenden, dass $t\cos(t) - \sin(t) < 0$ für $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ist.

d) Bestimmen Sie das Minimum und Maximum von f auf $[0, \frac{1}{2}]$ für das in b) berechnete a.

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte