Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, W. Stannat
Assistenten: B. Schröter, O. Sète

2017 SoSe
11. Oktober 2017

Modulprüfung
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften"

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem beidseitig handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf A4 Blättern ab. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden. Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe (8 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{j=0}^{n} (1 + z^{2^j}) = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z},$$

wobei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, eine komplexe Zahl ist.

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -8i$.

b) Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8.$$

und bestimmen Sie außerdem die Zerlegung von p

- in komplexe Linearfaktoren, sowie
- in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$. Geben Sie das zugehörige Restglied in der Lagrange-Form an.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals in a) und die allgemeine Stammfunktion in b) und c):

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}\, dx,$ b) $\displaystyle\int (x+1)\cos(x)\, dx,$ c) $\displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^2}{1 + x^2}\, dx.$

5. Aufgabe (11 Punkte)

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{4x^3 - 3x^2}$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima sowie Maxima.

6. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Funktion $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, ist bijektiv. Zeigen Sie, dass für die Ableitung $f'(x) = -1 - (f(x))^2$ gilt, und berechnen Sie $(f^{-1})'(x)$ mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$.

Hinweis: Fassen Sie den Ausdruck zuerst zu einem Bruch zusammen.

c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ gilt $\tan(x) > x$.

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte