1. Aufgabe (8 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{j=0}^{n}(1+z^{2^j}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z},$$

wobei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, eine komplexe Zahl ist.

Lösung. [8 Punkte]

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\prod_{j=0}^{0}(1+z^{2^j}) = (1+z^{2^0}) = 1+z = \frac{(1+z)(1-z)}{1-z} = \frac{1-z^2}{1-z} = \frac{1-z^{2^{0+1}}}{1-z}.$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\prod_{j=0}^{n}(1+z^{2^j}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}.$$

Induktionsbehauptung: Es gilt auch

$$\prod_{j=0}^{n+1}(1+z^{2^j}) = \frac{1-z^{2^{n+2}}}{1-z},$$

Induktionsschritt: Es ist

$$\prod_{j=0}^{n+1}(1+z^{2^j}) = \prod_{j=0}^{n}(1+z^{2^j})(1+z^{2^{n+1}}) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}(1+z^{2^{n+1}}) = \frac{1-z^{2\cdot 2^{n+1}}}{1-z} = \frac{1-z^{2^{n+2}}}{1-z}.$$

$\square$

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -8i$.

b) Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8.$$

und bestimmen Sie außerdem die Zerlegung von p

- in komplexe Linearfaktoren, sowie
- in reelle Linearfaktoren und reelle quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

Lösung. a) [4 Punkte]

Schreibe z in der Eulerdarstellung: $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$r^3 e^{i3\varphi} = z^3 = -8i = 2^3 e^{-i\pi/2}.$$

Daher folgt $r^3 = 2^3$, also $r = 2$, und

$$3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

also

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dies gibt die drei verschiedenen Lösungen

$$z_k = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(Winkel: $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$.)

b) [6 Punkte]

Es ist $p(x) = 2(x^3 - x^2 + 4x - 4)$, also

$$p(x) = 2((x^2(x-1) + 4(x-1)) = 2(x-1)(x^2+4).$$

(Alternativ kann die Nullstelle 1 geraten werden und $p(x)$ durch $x-1$ per Polynomdivision geteilt werden.)

Weiter ist $x^2 + 4 = x^2 - (2i)^2 = (x-2i)(x+2i)$. Alternativ: pq oder abc-Formel zur Bestimmung der Nullstellen $2i$ un $-2i$.

Damit hat p die drei Nullstellen 1, $2i$ und $-2i$.

Die Zerlegung in komplexe Linearfaktoren ist

$$p(x) = 2(x-1)(x-2i)(x+2i).$$

Die Zerlegung in reelle Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen ist

$$p(x) = 2(x-1)(x^2+4).$$

($x^2 + 4$ hat nichtreelle Nullstellen.)

□

3. Aufgabe (8 Punkte)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, im Entwicklungspunkt $x_0 = -1$. Geben Sie das zugehörige Restglied in der Lagrange-Form an.

Lösung. Berechnung der ersten drei Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}, \\
f'(x) &= 3(x+2)^{-2} = \frac{3}{(x+2)^2}, \\
f''(x) &= -2! \cdot 3(x+2)^{-3} = -\frac{6}{(x+2)^3}, \\
f'''(x) &= 3! \cdot 3(x+2)^{-4} = \frac{18}{(x+2)^4}.
\end{aligned}$$

Daher ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 \\
&= -2 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 \\
&= -2 - 3x - 3x^2.
\end{aligned}$$

Das Restglied hat die Form

$$\begin{aligned}
R_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \\
&= \frac{3}{(\xi+2)^4}(x+1)^3,
\end{aligned}$$

wobei ξ ein Punkt zwischen -1 und x ist.

$\square$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Wert des Integrals in a) und die allgemeine Stammfunktion in b) und c):

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx$, b) $\displaystyle\int (x+1)\cos(x)\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2}\,dx$.

Lösung. a) [4 Punkte]

Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx &= -\int_0^\pi \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx = -\ln|2+\cos(x)|\Big|_0^\pi \\ &= -\ln|1| + \ln|3| = \ln(3).\end{aligned}$$

Alternative 1: Substituiere $t = 2+\cos(x)$, dann ist $dt = -\sin(x)dx$, also

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx = \int_3^1 \frac{-1}{t}\,dt = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|\Big|_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln(3).$$

Alternative 2: Substituiere $t = \cos(x)$, dann ist $dt = -\sin(x)dx$, also

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{2+t}\,dt = -\ln|2+t|\Big|_1^{-1} = \ln|3| - \ln|1| = \ln(3).$$

b) [4 Punkte]

Partielle Integration: Mit $u(x) = x+1$ und $v'(x) = \cos(x)$, also $v(x) = \sin(x)$, ist

$$\begin{aligned}\int (x+1)\cos(x)\,dx &= (x+1)\sin(x) - \int 1\sin(x)\,dx \\ &= (x+1)\sin(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) [4 Punkte]

Es ist

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan(x)^2}{1+x^2}\,dx &= \int \arctan'(x)\arctan(x)^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}(\arctan(x))^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alternative: Substituiere $t = \arctan(x)$, dann ist $dt = \frac{dx}{1+x^2}$, also

$$\int \frac{\arctan(x)^2}{1+x^2}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\arctan(x)^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\square$

5. Aufgabe (11 Punkte)

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{4x^3-3x^2}$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und bestimmen Sie alle lokalen und globalen Minima sowie Maxima.

Lösung. Es ist

$$f'(x) = (4 \cdot 3x^2 - 6x)e^{4x^3-3x^2} = 6(2x^2 - x)e^{4x^3-3x^2} = 6x(2x-1)e^{4x^3-3x^2}.$$

Daher hat f' Nullstellen in $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Da $6e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ hat f' das gleiche Vorzeichen wie $x(2x - 1)$.

- Für $-1 \leq x < 0$ sind $x < 0$ und $2x - 1 < 0$, also $f'(x) > 0$ und somit f streng monoton wachsend.
- Für $0 < x < \frac{1}{2}$ sind $x > 0$ und $2x - 1 < 0$, also $f'(x) < 0$ und somit f streng monoton fallend.
- Für $\frac{1}{2} < x \leq 1$ sind $x > 0$ und $2x - 1 > 0$, also $f'(x) > 0$ und damit f streng monoton wachsend.

Daher gilt in den kritischen Punken:

- Bei $x = 0$ hat f ein lokales Maximum.
- Bei $x = \frac{1}{2}$ hat f ein lokales Minimum.

An den Randpunkten gilt:

- Am linken Randpunkt hat f ein lokales Minimum.
- Am rechten Randpunkt hat f ein lokales Maximum.

Globale Extrema: Wegen

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f(\frac{1}{2}) = e^{-1/4}, \quad f(-1) = e^{-7}, \quad f(1) = e^1$$

hat f ein globales Minimum in $x = -1$ und ein globales Maximum in $x = 1$. $\square$

6. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Funktion $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, ist bijektiv. Zeigen Sie, dass für die Ableitung $f'(x) = -1 - (f(x))^2$ gilt, und berechnen Sie $(f^{-1})'(x)$ mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$.

Hinweis: Fassen Sie den Ausdruck zuerst zu einem Bruch zusammen.

c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ gilt $\tan(x) > x$.

Lösung. a) [3 Punkte]

Mit der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin(x)^2} = -\frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -1 - f(x)^2.$$

Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-1 - f(f^{-1}(x))^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

b) [4 Punkte]

Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

An beiden Stellen, wo wir die Regel von l'Hospital verwendet haben, konvergieren Zähler und Nenner gegen 0.

c) [4 Punkte]

Sei $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ und $f(t) = \tan(t)$. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz ($a = 0$, $b = x$):
Es existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(\xi) = 1 + \tan(\xi)^2 \geq 1.$$

Da $x > 0$ ist, folgt $\tan(x) > x$.

Alternative: Sei $f(x) = \tan(x) - x$. Dann ist

$$f'(x) = 1 + \tan(x)^2 - 1 = \tan(x)^2 > 0,$$

also f streng monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{4}]$, insbesondere also $f(x) > f(0) = 0$, also $\tan(x) > x$.

□