1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \alpha ac + \beta bd,\ \ \alpha, \beta > 0$$

a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta > 0$, sodass $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ist.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$.

Lösung. a) [4 Punkte] Da $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sein soll, gilt $\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \alpha + 4\beta = 1$ (1 Punkt) und $\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle = \alpha - 4\beta = 0$ (1 Punkt).

Aus der zweiten Gleichung erhält man: $\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$. Dies eingesetzt in die erste Gleichung ergibt: $\alpha + 4\beta = 4\beta + 4\beta = 8\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{8}$ und schließlich $\alpha = 4\beta = 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{8}$ ist $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Orthonormalbasis.

((1 Punkt) Rechnung + (1 Punkt) Antwort)

b) [2 Punkte] $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}} \underset{\mathrm{ONB}}{=} \begin{bmatrix} \langle \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right] \rangle \\ \langle \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \rangle \end{bmatrix}$ (1 Punkt) $= \begin{bmatrix} 1 - \frac{10}{8} \\ 1 + \frac{10}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$. (1 Punkt) Ggf. Folgefehler aus a) berücksichtigen.

alternativ: Gesucht sind $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right] + \alpha_2 \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$. (1 Punkt) LGS aufstellen und z.B. mit Gauß lösen: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{array}\right]$

$\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]_{\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$ (1 Punkt) Keine Rechenfehler suchen!

$\square$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |\sin(x)|. \end{aligned}$$

Lösung. Die Funktion f ist gerade, da

$$|\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher gilt $b_k = 0$ für alle $k \geq 1$. (1 Punkt)

1. Weg: Die Funktion ist π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{\pi}, \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

sowie für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(t)\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\frac{1}{2k}\sin(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi}(0-0) - \frac{4}{\pi}\left[-\cos(t)\frac{1}{4k^2}\cos(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\frac{1}{4k^2}\cos(2kt)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi k^2} + \frac{1}{4k^2}a_k, \end{aligned}$$

und daher $a_k = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}$. (1 Punkt) Daher ist die Fourrierreihe von f gegeben durch

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kt). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

2. Weg: Die Funktion ist 2π-periodisch. Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi}, \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

sowie für $k > 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\sin(t)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(t)\frac{1}{k}\sin(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}(0-0) - \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\frac{1}{k^2}\cos(kt)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(t)\frac{1}{k^2}\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2(-(-1)^k-1)}{\pi k^2} + \frac{1}{k^2}a_k, \end{aligned}$$

und daher $a_k = -\frac{2(1+(-1)^k)}{\pi(k^2-1)}$. (1 Punkt) ($a_1 = 0$, da $\int\limits_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = 0$.) (-1 Punkt, falls a_1 nicht gesondert berechnet wurde.) Daher ist die Fourrierreihe von f gegeben durch

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=2}^\infty \frac{2(1+(-1)^k)}{\pi(k^2-1)}\cos(kt) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kt). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$\square$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$:

$$W = \left\{ax^3 + bx - a : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Wählen Sie aus der Menge $\mathcal{M} = \{x^3 + 2x - 1, x^2 - 2, 0, -x^3 + 1, 2x - 1\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ eine Basis $\mathcal{D}$ von W aus. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine Basis von W ist.

b) Begründen Sie kurz, warum span $\left\{x^2 - 2\right\}$ kein Teilraum von W ist.

Lösung. a) [4 Punkte] Wähle $\mathcal{D} = \left\{x^3 + 2x - 1, -x^3 + 1\right\}$. (1 Punkt) Es gilt $\mathcal{D} \subset W$ (1 Punkt), denn beide Polynome sind aus W (für $a = 1, b = 2$ bzw. $a = 1, b = 0$). Zwei linear unabhängige Polynome bilden eine Basis von W, da $\dim(W) = 2$ nach Aufgabenstellung. (1 Punkt) Die beiden Polynome in $\mathcal{D}$ sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander (1 Punkt) , d.h. es gibt kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x^3 + 2x - 1 = \alpha(-x^3 + 1)$. Somit ist $\mathcal{D}$ eine Basis von W.

alternativ lineare Unabhängigkeit:

Z.z. ist $\alpha_1(x^3 + 2x - 1) + \alpha_2(-x^3 + 1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

$\alpha_1(x^3 + 2x - 1) + \alpha_2(-x^3 + 1) = (\alpha_1 - \alpha_2)x^3 + 2\alpha_1 x + (-\alpha_1 + \alpha_2) = 0$

Koeffizientenvergleich führt auf: $\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ 2\alpha_1 = 0,\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $\alpha_1 = 0$ und dies in die erste oder dritte Gleichung eingesetzt ergibt $\alpha_2 = 0$.

Die einzige Lösung ist also $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Somit sind die beiden Polynome in $\mathcal{D}$ linear unabängig. (1 Punkt) **alternativ Basisbeweis:** prüfen ob gewähltes $\mathcal{D}$ linear unabhängig und erzeugend ist.

(richtiges $\mathcal{D}$ + lin. Unabhängigkeit + **2 Punkte** Erzeugendensystem)

Für Erzeugendensystem beim alternativen Basisbeweis ist entweder z.z., dass $\mathcal{D} \subset W$ und alle Polynome in W lassen sich durch die beiden Polynome in $\mathcal{D}$ darstellen (jeweils ein Punkt) oder, dass gilt $\operatorname{span}(\mathcal{D}) = W$ (zwei Punkte): $\operatorname{span}(\mathcal{D}) = \operatorname{span}\left\{x^3 + 2x - 1, -x^3 + 1\right\} = \left\{a(x^3 + 2x - 1) + b(-x^3 + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$
$= \cdots = \left\{(a - b)x^3 + 2ax - (a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ax^3 + bx - a \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = W$.

$\mathcal{D}$ ist eindeutig. Ggf. Folgefehler bei falsch gewähltem $\mathcal{D}$ berücksichtigen.

b) [1 Punkt] span $\left\{x^2 - 2\right\}$ ist kein Teilraum von W, da $x^2 - 2 \notin W$, da Polynome in W keine quadratischen Terme haben. (1 Punkt)

□

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Gegeben sind die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

$$a_n = \frac{(n-1)^2}{5+n^2}, \qquad b_n = 3^{-n}\sin(n)e^n, \qquad c_n = n + \frac{n}{2}(-1)^n.$$

Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert oder begründen Sie ihre Divergenz.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

Lösung. a)

- [2 Punkte] $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{5+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{5+n^2} =$ (1 Punkt) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2/n+1/n^2}{5/n^2+1} = 1$ (1 Punkt).
- [3 Punkte] $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sin(n)(\frac{e}{3})^n$. Da $e < 3$ und $|\sin(n)| \leq 1$ (1 Punkt) man hat $0 \leq |b_n| \leq (e/3)^n$ (1 Punkt) und $\lim_{n\to\infty}(e/3)^n = 0$ (1 Punkt) damit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
  Die Begründung, dass eine Folge gegen 0 konvergiert, wenn ein Faktor dies tut ist nicht ausreichend, z.B. $3^{-n}3^n$ konvergiert gegen 1 bzw. $3^{-n}4^n = (4/3)^n$ divergiert bestimmt gegen ∞.
- [2 Punkte] Da $c_n \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ ist c_n bestimmt divergent gegen unendlich.
  Es reicht nicht als Begründung, dass ein Teil der Folge divergiert, z.B. $n - n$ ist konstant 0, aber n divergiert bestimmt gegen ∞ und $-n$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.
  Es reicht auch nicht, wenn aus der bestimmten Divergenz von (n) und $|n| > |\frac{n}{2}(-1)^n|$ die bestimmte Divergenz von (c_n) gefolgert wird. Gegenbeispiel: (d_n) mit $d_n = n - (n - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ konvergiert aber $(n) \to \infty$ und $|n| > |n - \frac{1}{n}|$.

b) [5 Punkte] Induktionsanfang für $n = 1$.

$$\text{L.S.} \quad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$\text{R.S.} \quad \frac{n}{2(n+2)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6} \text{ (1 Punkt)}$$

Induktionsschritt. Induktionsvoraussetzung (I.V.) (1 Punkt): Die Aussage gilt für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsbehauptung (I.Beh.): Die Aussage gilt auch für das auf n folgende $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{2(n+3)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{L.S der I.Beh.} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&\overset{I.V.(1\text{ Punkt})}{=} \frac{n}{2(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{2}{2(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2(n+3)} = \text{R.S. der I.Beh (2 Punkte)}
\end{aligned}$$

□

5. Aufgabe (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{8}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung. a) [4 Punkte]

Wir bestimmen das Integral mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Der Ansatz lautet

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Die Zuhaltemethode liefert $A = \frac{1}{8}$ und $B = -\frac{1}{8}$. (1 Punkt) Somit ist

$$\int \frac{8}{x^2-16}dx = \int \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \ln|x-4| - \ln|x+4| + c \quad \text{(2 Punkte)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

b) [3 Punkte]

Wir substituieren $t := \sqrt{1+x}$. Dann gilt $dt = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx$ und $2+x = t^2+1$. (1 Punkt) Es folgt

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{2t}{(t^2+1)t}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt$$
$$= 2\arctan(t) + c = 2\arctan\left(\sqrt{1+x}\right) + c \quad \text{(2 Punkte)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Falls bei (a) oder (b) die Konstante vergessen wurde, einen Punkt abziehen. Falls beide Konstanten vergessen worden sind, dann ebenfalls nur einen Punkt insgesamt abziehen.

c) [3 Punkte]

Wir verwenden partielle Integration auf $f(x) = x$ und $g'(x) = \sin(x)$. (1 Punkt) Dann ist $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$ und wir erhalten

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [x(-\cos(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(x))dx$$
$$= -[x\cos(x)]_0^{\pi} + [\sin(x)]_0^{\pi} \quad \text{(1 Punkt)}$$
$$= -[\pi\cos(\pi) - 0\cdot\cos(0)] + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi. \quad \text{(1 Punkt)}$$

□

6. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) Ist f' auf $\mathbb{R}$ stetig? Ist f' auf $\mathbb{R}$ differenzierbar?

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

Lösung. a) [2 Punkte]

Es gilt

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

und deshalb folgt die Behauptung aus dem "Sandwich"-Prinzip und $\lim_{x\to 0} x = 0$. (2 Punkte)

b) [5 Punkte]

Die Funktion f ist für $x \neq 0$ differenzierbar als Komposition und Produkt differenzierbarer Funktionen. (1 Punkt) Weiter gilt mit (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad \text{(1 Punkt)}$$

Also ist f in 0 differenzierbar. (1 Punkt) Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad \text{(1 Punkt)}$$

Da eine differenzierbare Funktion immer auch stetig ist und eben gezeigt wurde, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, muss f auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sein. (1 Punkt)

c) [2 Punkte]

Da die Funktion $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$ nicht stetig ist (siehe Hinweis), ist auch f' in 0 nicht stetig. (1 Punkt) Aus der Unstetigkeit folgt auch das f' in 0 nicht differenzierbar ist. (1 Punkt)

□

7. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\det(C)$ in Abhängigkeit vom Parameter α mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das homogene lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.

c) Bestimmen Sie $\det(-2C^T)$ für $\alpha = \frac{1}{4}$.

Lösung. a) [4 Punkte] $\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{nach 3. Sp.}}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (1 Punkt)

$\underset{\text{nach 3. Z.}}{=} -2\left(1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$ (1 Punkt)

$= -2(2\alpha^2 - 2 + 2 - 4\alpha)$ (1 Punkt)

$= -2(2\alpha^2 - 4\alpha) = -4\alpha^2 + 8\alpha = \alpha(8 - 4\alpha)$(1 Punkt)

Wird die Determinate der 3×3 - Matrix nicht mit Laplace, sondern z.B. mit Sarrus bestimmt, gibt es **maximal noch drei Punkte**. Wird Laplace überhaupt nicht verwendet (stattdessen z.B. Gauß), gibt es **maximal noch zwei Punkte**.

b) [3 Punkte] $C\vec{x} = \vec{0}$ hat unendlich viele Lösungen, falls die Zeilen/Spalten von C linear abhängig sind, also $\det(C) = 0$ gilt. (1 Punkt)
$\det(C) = \alpha(8 - 4\alpha) = 0$ gilt genau dann wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2$. (2 Punkte)
Für alle anderen $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\det(C) \neq 0$ und somit $C\vec{x} = \vec{0}$ für diese eindeutig lösbar.

c) [3 Punkte] $\det(-2C^T) = (-2)^4 \det(C^T)$ (1 Punkt) $\underset{\det(C^T)=\det(C)}{=} (-2)^4 \det(C)$ (1 Punkt) $=$ $(-2)^4(\alpha(8 - 4\alpha)) \underset{\alpha=\frac{1}{4}}{=} 16\frac{1}{4}(8 - 1) = 16\frac{7}{4} = 28$ (1 Punkt)

$\square$

8. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

und der Vektor $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.

c) Ist B diagonalisierbar?

d) Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist.

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = B\vec{y}(t)$$
$$\vec{y}(0) = 7\vec{w}.$$

Lösung. a) [3 Punkte] $p_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I_3) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$= \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$ (1 Punkt)

$\underset{\text{2. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (2-\lambda) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right)$

$= (2-\lambda)\,[(-2-\lambda)(4-\lambda)+8]$ ((2 Punkte)Rechnung/Antwort)

$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$

Das charakt. Polynom muss hier nicht ausmultipliziert oder faktorisiert sein, um alle Punkte zu bekommen.

Keinen Punkt abziehen, falls das char. Polynom mit folgendem Ansatz bestimmt wurde: $p_B(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_3 - B) = \cdots = \lambda(2-\lambda)^2$.

b) [5 Punkte] Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $p_B(\lambda)$: $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = 2$. (2 Punkte)

Es muss nachvollziehbar sein, wo die Eigenwerte herkommen. (z.B. Berechnung der Nullstellen von p_B oder p_B in Linearfaktoren zerlegt, sodass die Nullstellen abgelesen werden können)

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist:

$V_{\lambda_{2/3}} = \operatorname{Kern}(B - 2 \cdot I_3) = \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \underset{-2\text{III}+\text{I}}{=} \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{-\frac{1}{4}\text{I}}{=}$

$\operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$= \operatorname{span}\left\{\left[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$

(Ansatz + (2 Punkte) Rechnung/Antwort)

Für einen bzw. zwei Rechenfehlern einen bzw. zwei Punkt(e) abziehen. Folgefehler berücksichtigen.

Falls der Eigenraum zum Eigenwert 0 bestimmt wurde, einen Punkt abziehen:

$V_{\lambda_1} = \text{Kern}(B - 0 \cdot I_3) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \cdots = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$ $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Wurde mit einem falschen „Eigenwert“ (also weder 0 noch 2) versucht einen Eigenraum zu bestimmen und der Fehler wird vom Studenten bemerkt, gilt das als Folgefehler. Also **keinen Punkt abziehen**, falls sonst alles richtig ist. Wird der Fehler nicht bemerkt und es kommt als „Eigenraum“ der Nullraum heraus, **einen Punkt abziehen**, da offensichtlich nicht verstanden wurde, was ein Eigenraum ist. Wird nicht der ganze Eigenraum, sondern nur zwei (bzw. ein) linear unabhängiger Eigenvektor angegeben, **einen** Punkt abziehen.

c) [3 Punkte] Nach a), b) ist algVFH$(\lambda_{1/2}) = 2 =$dim$(V_{\lambda_{1/2}})$ =geomVFH$(\lambda_{1/2})$, da $\lambda_{1/2}$ doppelte Nullstelle von p_B ist und der zugehörige Eigenraum $V_{\lambda_{1/2}}$ von zwei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. (1 Punkt) Da für jeden Eigenwert 1 $\leq$geomVFH$\leq$algVFH gilt, ist algVFH$(\lambda_3) = 1 =$geomVFH(λ_3). (1 Punkt) Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte von B überein und B ist somit diagonalisierbar. (1 Punkt)

Fehlt die Begründung für die Diagonalisierbarkeit, d.h. es wird nur behauptet, gibt es **keinen** Punkt.

d) [1 Punkt] $B\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (1 Punkt) $= 2\vec{w}$

Also ist $\vec{w}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2.

alternativ: $\vec{w} \in V_{\lambda_{2/3}}$, denn $\vec{w} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (1 Punkt) Also ist $\vec{w}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2.

Die Begründung muss natürlich zum in b) bestimmten Eigenraum passen.

e) [2 Punkte] $7\vec{w}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 2, (1 Punkt) da $B(7\vec{w}) = 7 \cdot (B\vec{w}) \underset{\text{nach d)}}{=} 7 \cdot (2\vec{w}) = 2 \cdot (7\vec{w})$. $\vec{y}(t) = e^{2(t-0)} \cdot 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (1 Punkt) $= \begin{bmatrix} 14e^{2t} \\ 0 \\ 14e^{2t} \end{bmatrix}$

alternativ 1: $7\vec{w} \in \text{span}\{\vec{w}\}$ und somit nach d) ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert 2. (Lösung wie oben)

alternativ 2: $7\vec{w}$ ist Linearkombination des nach d) Eigenvektors $\vec{w}$ zum Eigenwert 2.
$\vec{y}(t) = 7e^{2(t-0)} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{2t} \\ 0 \\ 14e^{2t} \end{bmatrix}$

alternativ 3: Das macht hoffentlich keiner!
Nach c) ist B diagonalisierbar. Diagonalisierung $B = SDS^{-1}$ mit D Diagonalmatrix bestimmen. Dann ist $\vec{y}(t) = Se^{(t-0)D}S^{-1}7\vec{w} = \cdots = \begin{bmatrix} 14e^{2t} \\ 0 \\ 14e^{2t} \end{bmatrix}$

(Für alternative Lösungswege gibt es für den Ansatz und für die richtige Lsüng)
Keine Rechenfehler suchen! (z.B. bei der Bestimmung einer Diagonalisierung)

$\square$

9. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x \arctan(x).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von g im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $x \in [-1, 1]$ für das Restglied $|R_2(x)| \leq \frac{4}{3}$ gilt.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= x \arctan(x), && && g(0) = 0,\\
g'(x) &= \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}, && \text{(1 Punkt)} && g'(0) = 0,\\
g''(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}, && \text{(1 Punkt)} && g''(0) = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$T_2(x) = x^2. \quad \text{(3 Punkte)}$$

Für das Restglied von T_2 benötigen wir noch die 3. Ableitung von g

$$g'''(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^3} \quad \text{(1 Punkt)}$$

Den Punkt nur geben, falls ersichtlich ist, dass die dritte Ableitung wirklich berechnet worden ist.

und erhalten auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|R_2(x)| &\overset{\text{(1 Punkt)}}{=} \left|\frac{-8\xi}{(1+\xi^2)^3\,3!}\,x^3\right| \overset{\text{(1 Punkt)}}{=} \left|\frac{8\xi}{(1+\xi^2)^3\,3!}\right| \underbrace{|x^3|}_{\leq 1}\\
&\overset{\text{(1 Punkt)}}{\leq} \frac{\max_{\xi\in[-1,1]} |8\xi|}{3!\,\min_{\xi\in[-1,1]}(1+\xi^2)^3} \overset{\text{(1 Punkt)}}{\leq} \frac{8}{3!} \cdot 1 = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

wobei ξ zwischen x und 0 liegt.

Keinen Punkt abziehen, falls $\frac{8}{3!}$ nicht vereinfacht wird. Ebenso keinen Punkt abziehen, falls nicht angegeben wird, in welchem Bereich ξ liegt.

□

Punkte	Note
0–39	5,0
40–44	4,0
45–48	3,7
49–52	3,3
53–56	3,0
57–60	2,7
61–64	2,3
65–68	2,0
69–72	1,7
73–76	1,3
77–80	1,0