1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antworten nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.

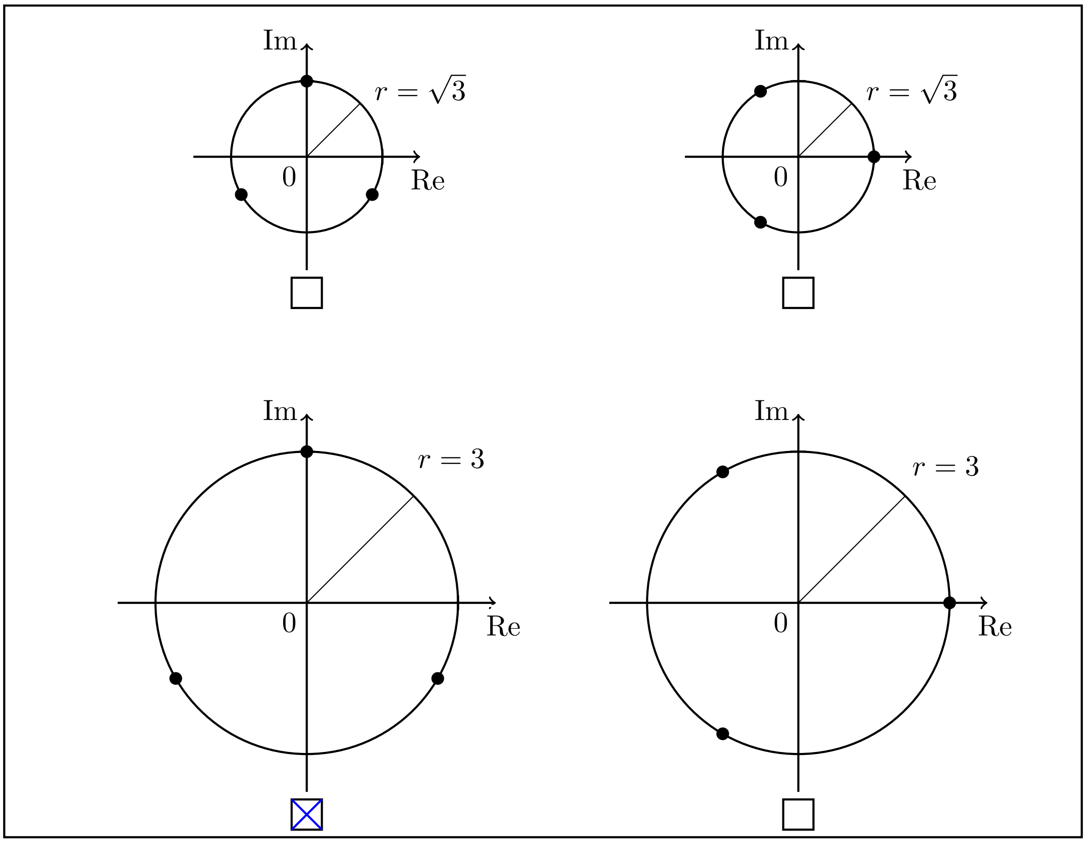
(a) Sei $f : \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2$ eine Funktion. Dann gilt:

- ☐ f ist surjektiv.
- ☒ f ist injektiv.
- ☐ f hat kein Maximum.
- ☐ $f(x) < 0$ für alle $x \in \{1,2,3\}$.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann gilt:

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1$.
- ☒ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(c) Welche der folgenden Skizzen enthält alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -27i$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



(d) Sei p ein Polynom mit $p(z) = z^3 - 22z^2 + 7z - 1$. Dann gilt:

☐ p hat mindestens 4 verschiedene Nullstellen.

☒ p hat mindestens einen reellen Linearfaktor.

☐ p hat keine komplexe Linearfaktorzerlegung.

☐ p hat keine reelle Nullstelle.

(e) Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = e^{-\sqrt{(x^2+1)}+1}$. Dann gilt:

☐ Sie besitzt im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle.

☒ Sie hat auf dem Intervall $[0, 1]$ ein Maximum.

☐ Sie ist nicht stetig.

☐ Sie hat die Stammfunktion $F(x) = xe^{-\sqrt{x^2+1}+1}$.

(f) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 13x^3 - 3x$ hat die folgende Eigenschaft:

☒ Sie ist ungerade.

☐ Sie hat keine Nullstellen.

☐ Sie hat genau 3 Stellen $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.

☐ Sie hat keine Stammfunktion.

(g) Betrachten Sie die Gleichung $z^4 = -1 + i$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

☒ Die Gleichung hat genau 4 verschiedene Lösungen.

☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.

☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.

☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

(h) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt:

☒ Es gibt einen Punkt $\xi \in]0, 1[$, sodass das Rechteck mit Höhe $f(\xi)$ und Breite 1 den Flächeninhalt $A = \int_0^1 f(x)\, dx$ hat.

☐ f ist nicht integrierbar auf $[0, 1]$.

☐ f hat kein Maximum auf $[0, 2]$.

☐ Keine der oberen Möglichkeiten.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, gerade Funktion. Dann gilt:

☐ $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☒ $f'(x) = 0$ für $x = 0$.

☐ f ist injektiv.

☐ $f(x) = x^3$.

(j) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x) + 2\cos(2x)$ eine Funktion. Dann gilt:

☐ f ist nicht periodisch.

☒ Für $b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx$ gilt: $b_k = 0$ mit $k \in \mathbb{N}$.

☐ f ist streng monoton wachsend.

☐ Alle Fourierkoeffizienten sind 0.

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 12n^2 + 3n^3}{n^3(2n+1)}$ = $\boxed{2}$

da $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4 - 12n^2 + 3n^3}{n^3(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(4 - \frac{12}{n^2} + \frac{3}{n})}{n^4(2 + \frac{1}{n^4})} = \frac{4-0+0}{2+0} = 2.$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{(n^2+1)}$ = $\boxed{0}$

da $|\frac{\cos(n)}{n^2+1}| \le \frac{1}{n^2+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2}{\cos(x)}$ = $\boxed{-2}$

da $\frac{0^2-2}{\cos(0)} = -2.$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$ = $\boxed{1}$

da $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1$ mit L'Hospital.

(e) $\frac{d}{dx} \ln(x^x)$ = $\boxed{\ln(x) + 1}$

da $\frac{d}{dx} \ln(e^{x \ln(x)}) = \ln(x) + 1.$

(f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{\sin(x)}\right)$ = $\boxed{\frac{\sin(x)-(x+1)\cos(x)}{\sin^2(x)}}$

(g) $\int x^3 - \cos(x)\; dx$ = $\boxed{\frac{1}{4}x^4 - \sin(x)}$ $+c,\ c \in \mathbb{R}$

(h) Geben Sie den Ansatz der Partialbruchzerlegung für die

folgende rationale Funktion an:

$\frac{5x^3 - 12x + 1}{x^2(x^2-1)}$ = $\boxed{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}}$

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{2}$?

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$ = $\boxed{0}$

0, da $|b_n| = \frac{1}{2}|a_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

(j) Welche kleinste Periode T hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(5x)$

T = $\boxed{\frac{2\pi}{5}}$

da $\cos(5x + 2\pi) = \cos(5x) = \cos(5(x+T)) \Leftrightarrow 5x + 2\pi = 5x + 5T.$

3. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Tragen Sie die Ergebnisse in die dazugehörigen Felder ein. Bitte führen Sie Zwischenrechnungen auf eigenem Papier aus, das nicht abgegeben werden soll.

(a) [2 Punkte] Wenden Sie die Substitutionsformel mit der Substitution $t = x^2 - 1$ an. Sie müssen das substituierte Integral ***nicht*** weiter berechnen.

$$\int_0^1 x \cdot \sin(x^2 - 1)\, dx = \boxed{\tfrac{1}{2} \int_{-1}^{0} \sin(t)\, dt}$$

Mit $t = x^2 - 1$ folgt $t' = 2x$ und man erhält als neue Grenzen $t(0) = -1$ und $t(1) = 0$.

(b) [2 Punkte] Wenden Sie die Formel der partiellen Integration an, indem Sie $(x^2 - 3x)$ ableiten. Sie müssen das neue Integral ***nicht*** weiter berechnen.

$$\int 2(x^2 - 3x) \cdot e^{2x}\, dx = \boxed{(x^2 - 3x)e^{2x} - \int (2x - 3)e^{2x}\, dx \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

da $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$ und $\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}$.

(c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2 + 10x + 18}{x(x^2 + 6x + 9)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{(x + 3)^2}$$

$A = \boxed{2}$ $\quad B = \boxed{-1}$ $\quad C = \boxed{1}$

(d) [3 Punkte] Berechnen Sie eine Stammfunktion der folgenden rationalen Funktion:

$$\int \frac{2}{(x - 2)^2} - \frac{6x - 4}{3x^2 - 4x} + \frac{2}{1 + x^2}\, dx = \boxed{\tfrac{-2}{x-2} - \ln|3x^2 - 4x| + 2\arctan(x) \qquad +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $z + 13i = 2iz + 4$ und bringen Sie z in die Form $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung: [10 Punkte]

(a) [6 Punkte] Induktionsanfang für $n = 1$.

$$\text{L.S.} \qquad \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.S.} \qquad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Es gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung (I.Beh.): Die Aussage gilt auch für das auf n folgende $n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}
\text{L.S der I.Beh.} \quad &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{I.V.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2} = \text{R.S. der I.Beh}
\end{aligned}$$

(b) [4 Punkte] Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $z+13i = 2iz+4$ und bringen Sie z in die Form $z = x+iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Es gilt: $z = \frac{4-13i}{1-2i} = \frac{(4-13i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{30-5i}{5} = 6 - i$.

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 + be^x, & \text{für } x < \pi, \\ a & \text{für } x = \pi, \\ \dfrac{-\sin(x)}{x - \pi}, & \text{für } x > \pi, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie: $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$ für $a < b$.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.

Lösung:

(a) [6 Punkte] Wir vergleichen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle $x = \pi$ mit dem Funktionswert:

$$\lim_{x \nearrow \pi} f(x) = \lim_{x \nearrow \pi} 1 + be^x = 1 + be^\pi$$

$$\lim_{x \searrow \pi} f(x) = \lim_{x \searrow \pi} \frac{-\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{x \searrow \pi} \frac{-\cos(x)}{1} = 1$$

f ist also stetig in $x = \pi$, falls $a = 1$ und $b = 0$.
Außerdem sind $\frac{-\sin(x)}{x-\pi}$ und $1 + be^x$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und somit ist f auch stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$.

(b) [4 Punkte] Sei $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin(x)$. Sei $a < b$. Da h auf (a, b) differenzierbar ist, exisitiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen a und b sodass

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(\xi) \iff \frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} = \cos(\xi).$$

Daraus folgt

$$\frac{|\sin(b) - \sin(a)|}{|b - a|} = \left| \frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} \right| = |\cos(\xi)| \leq 1.$$

Durch Multiplikation mit $|b-a|$ erhalten wir die Behauptung: $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b-a|$.

6. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Sei $f\colon]-1,\infty[$ mit $f(x) = \ln(1+x) + x^2$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie das dazugehörige Restglied in der Langrange-Form.

(c) Zeigen Sie, dass für das Restglied mit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt: $|R_2(x)| \leq \dfrac{1}{3}$.

Lösung:

(a) [5 Punkte] Berechnung der ersten drei Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{-1} + 2x \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} + 2 \\ f^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3}. \end{aligned}$$

Daher ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &= 0 + 1x + \frac{1}{2}x^2 = x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

(b) [3 Punkte] Das Restglied hat die Form

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &= \frac{2(1+\xi)^{-3}}{3!}x^3 = \frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3, \end{aligned}$$

wobei ξ ein Punkt zwischen 0 und x ist.

(c) [2 Punkte] Wir schätzen das Restglied auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ab:

$$|R_2(x)| = |\frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3| = \frac{1}{3}\frac{|x^3|}{|1+\xi|^3} \leq \frac{1}{3}\frac{(\frac{1}{2})^3}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{3}.$$