Technische Universität Berlin **2019/20 WiSe**
Fakultät II – Institut für Mathematik 30. September 2019
Dozent: Prof. Dr. Jean-Dominique Deuschel

Probeklausur
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Falls nicht anders gefordert, ist ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (6 Punkte)
Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \alpha ac + \beta bd, \ \alpha, \beta > 0$$

a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta > 0$, sodass $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ ist.

b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |\sin(x)|. \end{aligned}$$

3. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$:

$$W = \left\{ ax^3 + bx - a : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Wählen Sie aus der Menge $\mathcal{M} = \{x^3 + 2x - 1, x^2 - 2, 0, -x^3 + 1, 2x - 1\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ eine Basis $\mathcal{D}$ von W aus. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ eine Basis von W ist.

b) Begründen Sie kurz, warum $\operatorname{span}\left\{ x^2 - 2 \right\}$ kein Teilraum von W ist.

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Gegeben sind die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

$$a_n = \frac{(n-1)^2}{5 + n^2}, \qquad b_n = 3^{-n} \sin(n) e^n, \qquad c_n = n + \frac{n}{2}(-1)^n.$$

Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenfalls ihren Grenzwert oder begründen Sie ihre Divergenz.

b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{8}{x^2 - 16} \, \mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(2 + x)\sqrt{1 + x}} \, \mathrm{d}x,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(x) \, \mathrm{d}x.$

6. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung f'. Begründen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) Ist f' auf $\mathbb{R}$ stetig? Ist f' auf $\mathbb{R}$ differenzierbar?

Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.

7. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\det(C)$ in Abhängigkeit vom Parameter α mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das homogene lineare Gleichungssystem $C\vec{x} = \vec{0}$ unendlich viele Lösungen hat.

c) Bestimmen Sie $\det(-2C^T)$ für $\alpha = \frac{1}{4}$.

8. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

und der Vektor $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B der Matrix B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B und den Eigenraum zum größten Eigenwert.

c) Ist B diagonalisierbar?

d) Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Eigenvektor von B ist.

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) &= B\vec{y}(t) \\ \vec{y}(0) &= 7\vec{w}. \end{aligned}$$

9. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = x \arctan(x).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von g im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $x \in [-1, 1]$ für das Restglied $|R_2(x)| \leq \frac{4}{3}$ gilt.

Gesamtpunktzahl: 80 Punkte