Technische Universität Berlin **SoSe 2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, M. Heida, R. Schneider

Probeklausur 1
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (11 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie AB.

$AB = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

$\det(A) = 6$

c) [2 Punkte] Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{5,5}$ hänge von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ ab, und habe die Determinante $\det(A) = a(2-a)^2$. Für welche a ist A nicht invertierbar?

A ist nicht invertierbar für $a = 0$ und $a = 2$.

d) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

e) [3 Punkte] $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ hat die Zeilenstufenform $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A) und die Dimension von Kern(A).

Basis von Bild(A): $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ dim(Kern(A)) = 3

Lösung. a) [2 Punkte] Matrixmultiplikation:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) [2 Punkte] Eine Laplace-Entwicklung nach der 3. Spalte ergibt

$$\det(A) = 1 \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 3 = 6.$$

c) [2 Punkte] A ist nicht invertierbar, genau dann wenn $\det(A) = 0$. Es ist $\det(A) = a(2 - a)^2 = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $a = 2$.

d) [2 Punkte] Die Variablen x_1, x_3, x_4 sind Pivotvariablen, nur x_2 ist frei wählbar. Rückwärts einsetzen ergibt $x_4 = 1$, $x_3 = 2$, x_2 ist frei wählbar, und $x_1 + x_3 = 4$, also $x_1 = 4 - x_3 = 2$. Also ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

e) [3 Punkte] Basis von Bild(A): Die NZSF hat Pivotelemente in den Spalten 1 und 3, daher bilden die 1. und 3. Spalte von A eine Basis von Bild(A):

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da die NZSF 2 Pivotvariablen hat, ist Rang$(A) = 2$, also mit der Dimensionsformel dim(Kern(A)) $= 5 -$ Rang$(A) = 3$.

Alternativ: An der NZSF erkennt man, dass in $Ax = 0$ drei Variablen frei wählbar sind (x_2, x_4 und x_5), also ist dim(Kern(A)) $= 3$.

$\square$

2. Aufgabe (7 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Sei $A = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie dieses in Linearfaktorzerlegung an.

Charakteristisches Polynom von A in Linearfaktorzerlegung:

$p_A(z) = (z - i)^2$

b) [2 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z-3)(z^2 - 3z)$ gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten von A.

Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten:

Eigenwert 3 mit $a(3) = 2$, Eigenwert 0 mit $a(0) = 1$

c) [3 Punkte] Die Matrix $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ hat die Eigenwerte 2, -2 und 5.

Bestimmen Sie den Eigenraum von B zum Eigenwert 2, und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 5.

Eigenraum zum Eigenwert 2:

$$V_2(B) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 5:

$g(5) = 1$

Lösung. a) [2 Punkte] Das charakteristischen Polynom ist

$$p_A(z) = \det(A - zI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2i - z & 1 \\ 1 & -z \end{bmatrix}\right) = (2i - z)(-z) - 1 = z^2 - 2iz - 1$$
$$= (z - i)^2.$$

b) [2 Punkte] Es ist $p_A(z) = -(z-3)(z^2 - 3z) = -(z-3)^2 z$. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Daher ist

Eigenwert	algebraische Vielfachheit
0	1
3	2

c) [3 Punkte] Es ist $V_2(B) = \mathrm{Kern}(B - 2I_3)$, also

$$V_2(B) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

D.h. wir haben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also $x_1 = \frac{x_3}{3}$ und $x_2 = 0$, und deshalb

$$V_2(B) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 5 erfüllt $1 \leq g(5) \leq a(5)$. Da $B \in \mathbb{R}^{3,3}$ die drei Eigenwerte 2, -2 und 5 hat, hat B keine weiteren Eigenwerte und daher ist die algebraische Vielfachheit $a(5) = 1$. Damit ist dann auch $g(5) = 1$.

$\square$

3. Aufgabe (6 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Schreiben Sie $z = 1 - i$ in Eulerdarstellung.

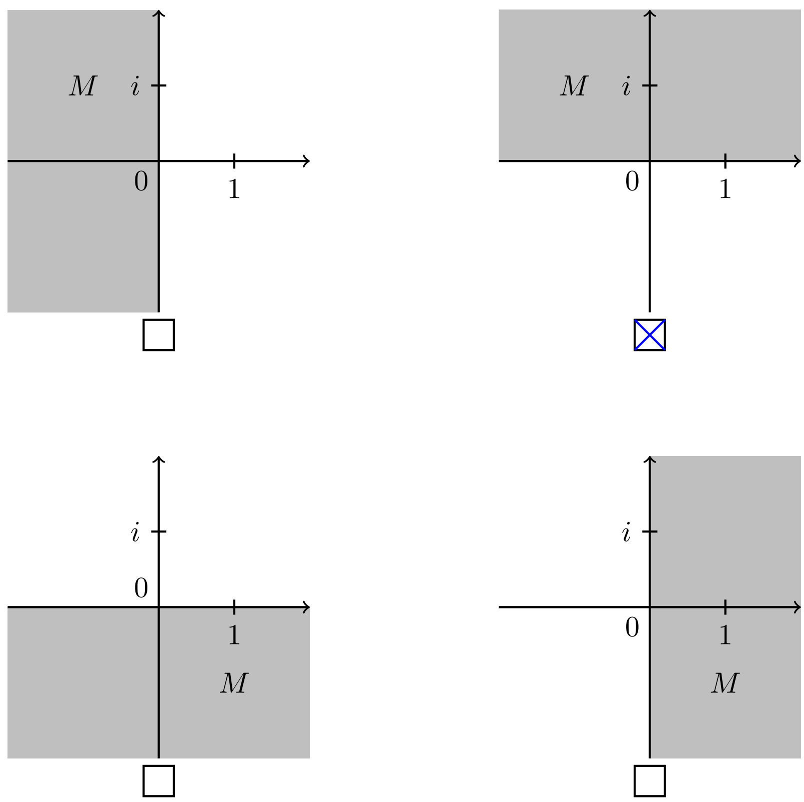
Eulerdarstellung:

$$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{1}{1-i}$.

$\mathrm{Re}(z) =$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(z) =$ $\frac{1}{2}$

c) [2 Punkte] Welche der Skizzen beschreibt die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(iz) \leq 0$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



Lösung. a) [2 Punkte] Es ist $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ und $\arg(1-i) = \arctan(\frac{-1}{1}) = -\frac{\pi}{4}$ (da $\mathrm{Re}(1-i) > 0$). Daher ist $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) [2 Punkte] Wir haben

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2}.$$

Daher sind $\mathrm{Re}(\frac{1}{1-i}) = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Im}(\frac{1}{1-i}) = \frac{1}{2}$.

c) [2 Punkte] Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{Re}(iz) = \mathrm{Re}(ix - y) = -y$, also $\mathrm{Re}(z) = -y \leq 0$ genau dann, wenn $y \geq 0$.

$\square$

4. Aufgabe (7 Punkte)

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5+3n^2+7}{7n^5+n^3+n}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist rekursiv gegeben durch $a_0 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{2+a_n}{3}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = 1 + \dfrac{1}{3^n}$.

Lösung. a) [2 Punkte] Durch Kürzen durch n^5 erhalten wir

$$\frac{n^5+3n^2+7}{n+n^3+7n^5} = \frac{1+3n^{-3}+7n^{-5}}{7+n^{-2}+n^{-4}} \to \frac{1+0+0}{7+0+0} = \frac{1}{7}.$$

b) [5 Punkte] Mit vollständiger Induktion:

IA Für $n = 0$ ist $a_0 = 2$ und $1 + \frac{1}{3^0} = 1 + 1 = 2$.

IV Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = 1 + \frac{1}{3^n}$.

IS Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{2+a_n}{3} \overset{\text{IV}}{=} \frac{2+1+\frac{1}{3^n}}{3} = \frac{3+\frac{1}{3^n}}{3} = 1 + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung.

□

5. Aufgabe (12 Punkte)

Berechnen Sie die Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2 e^{(x^3)}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (x-1)\sin(x)\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$. *Hinweis:* Substitution.

Lösung. a) [4 Punkte] Substituiere $u = x^3$, dann ist $du = 3x^2\,dx$ und

$$\int_{-1}^{2} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_{(-1)^3}^{2^3} e^u du = \frac{e^u}{3}\Big|_{-1}^{8} = \frac{e^8}{3} - \frac{1}{3e}.$$

b) [4 Punkte] Wir nutzen partielle Integration mit $u(x) = x-1$ und $v'(x) = \sin(x)$, also $u'(x) = 1$ und $v(x) = -\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (x-1)\sin(x)\,dx &= \left(-(x-1)\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx \\ &= \left(-(\pi-1)\cos(\pi) + (0-1)\cos(0)\right) + \sin(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \pi - 1 - 1 + \sin(\pi) - \sin(0) \\ &= \pi - 2.\end{aligned}$$

c) [4 Punkte] Substituiere $u = 4-x$, dann ist $du = -dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx &= -\int \frac{4-u}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u-4}{\sqrt{u}}\,du = \int \left(\sqrt{u} - \frac{4}{\sqrt{u}}\right) du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}}\,du - 4\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{4-x} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{4-x}(x+8) + c,\end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

$\square$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Lösung.

a) [2 Punkte] Definitionsbereich: Die Funktion f ist auf ganz $D_f = \mathbb{R}$ definiert, da der Nenner e^x nie den Wert 0 annimmt.

Nullstellen: Wir haben genau dann $f(x) = 0$, wenn der Zähler $x = 0$ ist.

b) [4 Punkte] Ableitung: $f(x) = xe^{-x}$ ist als Produkt zweier differenzierbarer Funktionen auch differenzierbar mit

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Kritische Stellen: Es ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 1$. Daher ist $x = 1$ die einzige kritische Stelle von f.

Extremalstellen: Außerdem ist $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$. Daher hat f genau eine lokale Extremalstelle bei $x = 1$ (und zwar ein lokales Maximum).

Alternativ: Es ist $f''(x) = (-1)e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$. Also ist $f''(1) = -1e^{-1} < 0$, somit hat f ein lokales Maximum in $x = 1$, und $x = 1$ ist eine lokale Extremstelle.

c) [4 Punkte] Da $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ sowie beide Funktionen differenzierbar sind, können wir den Satz von l'Hospital anwenden. Somit ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Für $x \to -\infty$ ist $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$, daher ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

$\square$

7. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{falls } x \leq 2, \\ 2x-3, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$

a) Zeigen Sie mit dem Differenzialquotienten, dass f in $x = 2$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades von f am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die zugehörige Taylorreihe gegen f?

Lösung. a) [5 Punkte] Die linksseitige Ableitung von f an der Stelle 2 ist

$$\lim_{x \nearrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \nearrow 2} \frac{(x-1)^2 - 1}{x-2} = \lim_{x \nearrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x-2} = \lim_{x \nearrow 2} x = 2$$

und die rechtsseitige Ableitung ist

$$\lim_{x \searrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{2x - 3 - 1}{x-2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \searrow 2} 2 = 2.$$

Da die beiden einseitigen Ableitungen übereinstimmen, ist f differenzierbar an der Stelle 2 mit $f'(2) = 2$.

b) [4 Punkte] Für $x < 2$ ist $f'(x) = 2(x-1)$, $f''(x) = 2$ und $f^{(n)}(x) = 0$ für $n \geq 3$. Somit lauten die Taylorpolynome

$$\begin{aligned} T_0(x) &= f(1) = 0, \\ T_1(x) &= T_0(x) + f'(1)(x-1) = 0, \\ T_2(x) &= T_1(x) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1)^2, \\ T_n(x) &= T_2(x) = (x-1)^2 \text{ für } n \geq 3. \end{aligned}$$

Damit lautet auch die Taylorreihe $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x-1)^2 = (x-1)^2$, und wir haben $T(x) = f(x)$ genau für $x \leq 2$.

□

8. Aufgabe (9 Punkte)

a) Zeigen Sie: $f : [3, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, ist streng monoton fallend.

b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x^2-1}$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Lösung. a) [2 Punkte] Mit dem Monotoniekriterium: Es ist

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Für $x \geq 3$ ist daher $f'(x) < 0$ und f ist streng monoton fallend.

Alternativ: Mit der Definition: Seien $3 \leq x < y$, dann ist $9 \leq x^2 < y^2$, also $8 \leq x^2 - 1 < y^2 - 1$, und daher $f(y) = \frac{1}{y^2-1} < \frac{1}{x^2-1} = f(x)$. Also ist f streng monoton fallend.

b) [2 Punkte] Partialbruchzerlegung des Integranden:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Koeffizienten berechnen: Zum Beispiel mit der Zuhaltemethode: $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$.

c) [3 Punkte] Es ist

$$\begin{aligned}
\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_3^b \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} (\log(x-1) - \log(x+1)) \Big|_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \log\left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{b-1}{b+1} \right) - \log\left(\frac{3-1}{3+1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\log(1) - \log\left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\log(2)}{2}.
\end{aligned}$$

d) [2 Punkte] Mit der PBZ aus b) ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \pm \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

□

9. Aufgabe (9 Punkte)

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ a \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

orthogonal bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$?

b) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ mit $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = 1$, und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad p(x) \mapsto xp'(x).$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix $f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ von f bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung. a) [2 Punkte] Das Standardskalarprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 8a + 2a - 20 = 10a - 20.$$

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind orthogonal, genau dann wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, also genau dann wenn $10a - 20 = 0$, also $a = 2$.

b) [7 Punkte] Benutze den Algorithmus aus dem Skript. Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} f(x^2 + x + 1) &= x \cdot (2x + 1) = 2x^2 + x \\ f(x + 1) &= x \cdot 1 = x \\ f(1) &= x \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(2x^2 + x) &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{da } 2x^2 + x = 2 \cdot (x^2 + x + 1) + (-1) \cdot (x + 1) + (-1) \cdot 1 \\ \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{da } x = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + (1) \cdot (x + 1) + (-1) \cdot 1 \\ \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{da } 0 = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + 0 \cdot (x + 1) + 0 \cdot 1 \end{aligned}$$

Darstellende Matrix:

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□