Technische Universität Berlin **SoSe 2019**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozenten: A. Gündel-vom Hofe, M. Heida, R. Schneider

Probeklausur 2
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO).
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- Geben Sie Ihre Lösungen in Reinschrift auf DIN A4-Blättern ab.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren werden nicht gewertet.
- **In den Aufgaben 1–3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie keine Rechnungen an.**
- **In den Aufgaben 4–9 ist immer ein vollständiger Lösungsweg anzugeben (Rechnung und/oder Begründung).**

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bei der Klausur sind 80 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 40 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe (10 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$$

$A =$ $\vec{b} =$

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

normierte Zeilenstufenform: $\left[\begin{array}{ccc|c} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{array}\right]$

c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des reellen linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{L} =$

d) [3 Punkte] Die normierte Zeilenstufenform von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ist $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $\operatorname{Rang}(A)$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}(A)$:

$\operatorname{Rang}(A) =$ Basis von $\operatorname{Bild}(A)$:

2. Aufgabe (7 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

a) [2 Punkte] Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\det(A) = 3a^2 + 2a$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A nicht invertierbar?

A nicht invertierbar für a

b) [2 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{7,7}$ mit charakteristischem Polynom $p_A(z) = -(z+2)^4(z-5)^3$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten.

Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten:

c) [3 Punkte] Sei $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Bestimmen Sie $\det(A)$ und den Eigenraum zum Eigenwert 2.

$\det(A) =$

Eigenraum zum Eigenwert 2:

3. Aufgabe (8 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

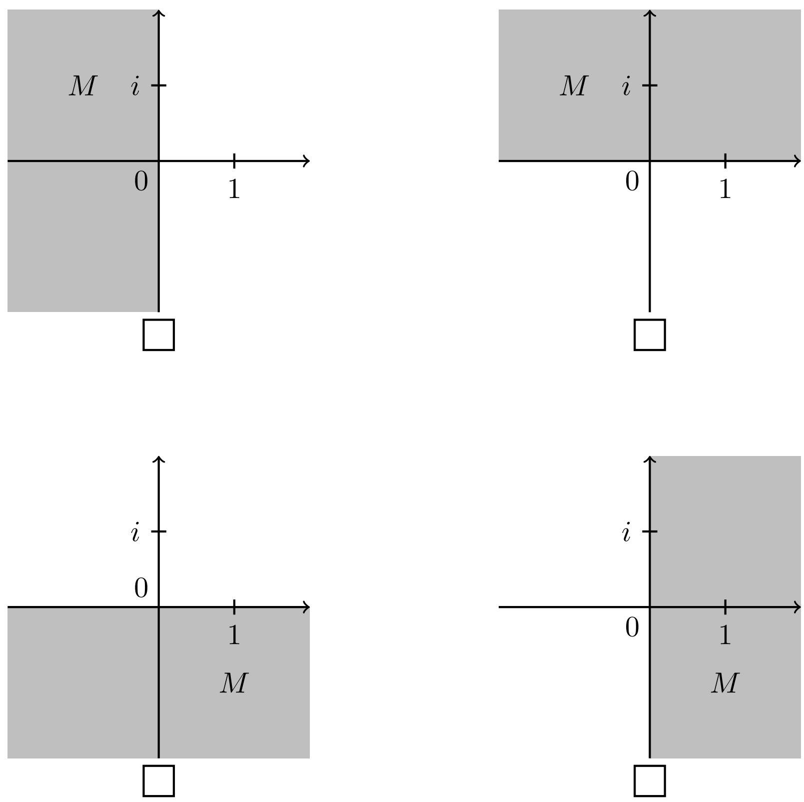
a) [3 Punkte] Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \frac{1-i}{1+i}$, sowie $z \cdot \overline{z}$.

$\mathrm{Re}(z) =$ $\mathrm{Im}(z) =$ $z \cdot \overline{z} =$

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Lösungen von $z^3 = 27i$. Sie können die Lösungen in kartesischer Darstellung oder Eulerdarstellung angeben.

Lösungen:

c) [2 Punkte] Welche der Skizzen beschreibt die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(iz) \geq 0$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



Bitte bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben auf separaten Blättern.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

5. Aufgabe (5 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{3}n}{n^3 + n^2 + 7}$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$

6. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin(\pi x) + \cos(\pi x) + x(x-2)$, mindestens eine Nullstelle in $[0, 2]$ hat.

7. Aufgabe (13 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2\sin(x))^2}\,dx$.

8. Aufgabe (14 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-2-x)^{-1}$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \geq 0$ ist

$$f^{(n)}(x) = n!(-2-x)^{-n-1}.$$

b) Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

c) Geben Sie das Restglied R_n zum n-ten Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ an. Zeigen Sie: Für $x \in [1, 5]$ gilt $|R_n(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$.

d) Für welche $x \in [1, 5]$ konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ gegen f?

9. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{für } -\pi < t < \pi, \\ 0 & \text{für } t = \pi. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie f auf $]-3\pi, 3\pi[$. Entscheiden Sie anhand der Skizze, ob f ungerade oder gerade ist.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Für welche $t \in\,]-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe, und ggf. gegen welchen Wert?

Gesamtpunktzahl: 80 Punkte