Technische Universität Berlin **SS 2001**
Fakultät II - Mathematik
Prof. Dr. Pohst
T. Lusala

Probeklausur zur „Lineare Algebra für Ingenieure“
Musterlösung von Daniel Schielzeth

Kommentare und Hinweise kursiv geschrieben. Für viele Aufgaben gibt es mehrere Lösungswege, wenn ihr also einen anderen habt, heißt das nicht, daß er falsch ist - ihr müßt ihn aber ausreichend begründen. Wir haben versucht, immer einen kurzen und einsichtigen Lösungsweg zu finden.

Verständnisteil

1. Aufgabe:

Z.z.: (i) Alle Vektoren stehen senkrecht aufeinander.
(ii) Alle Vektoren haben die Länge eins.
(iii) B ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Zu (i) $\vec{v} \perp \vec{w}$ nach Voraussetzung.
$\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ und $\vec{w} \perp \vec{v} \times \vec{w}$ folgt aus den Eigenschaften des Vektorprodukts.

Zu (ii) $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ nach Voraussetzung.
Es ist $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ die Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms. Da $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthonormal sind, ist dies ein Quadrat mit Kantenlänge eins, also $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 1$.

Zu (iii) Vektoren die senkrecht zueinander stehen sind linear unabhängig, wenn keiner von ihnen der Nullvektor ist. Da $\vec{v}$ und $\vec{w}$ normiert sind (also die Länge eins haben), ist keiner von beiden der Nullvektor - sie sind also linear unabhängig. Damit ist aber auch $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$. Nach (i) stehen auch alle drei Vektoren senkrecht zueinander, somit sind sie also linear unabhängig.
Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ (*Satz von Steinitz*).

Damit ist gezeigt, daß $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$ wirklich eine ONB des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe: Sind die folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume?

	ja	nein
$U_1 := \{\vec{x} = \binom{x_1}{x_2} \mid x_1 = 0\}$	x	○
$U_2 := \{\vec{x} = \binom{x_1}{x_2} \mid x_1 x_2 = 0\}$	○	x
$U_3 := \{\vec{x} = \binom{x_1}{x_2} \mid x_1 + x_2 = 0\}$	x	○
$U_4 := \{\vec{x} = \binom{x_1}{x_2} \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$	x	○
$U_5 := \{\vec{x} = \binom{x_1}{x_2} \mid x_1 + x_2 = 1\}$	○	x

3. Aufgabe: Offensichtlich ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von D, also ist $\dim D = 3$.

4. Aufgabe:

(i) Z.z.: $A_L \vec{x} = L(\vec{x}) \; \forall \; \vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Sei also $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$A_L \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 a_3 + x_3 a_2 \\ -x_3 a_1 + x_1 a_3 \\ -x_1 a_2 + x_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{x} = L(\vec{x}).$$

Damit ist gezeigt, daß A_L die Darstellungsmatrix von L ist.

(ii) Es gilt: $\vec{x} \perp \vec{a} \times \vec{x}$, also $0 = \langle \vec{x}, \vec{a} \times \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, L(\vec{x}) \rangle$.
Analog: $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{x}$, also $0 = \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{x} \rangle = \langle \vec{a}, L(\vec{x}) \rangle$.
Damit folgt: $\langle \vec{x}, L(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{a}, L(\vec{x}) \rangle = 0$.

(iii) Annahme: $\exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} = A_L \vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$.
Da immer gilt $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{x}$ folgt $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$. Es ist aber $\vec{a} \neq \vec{0}$ nach Voraussetzung, das heißt die Annahme war falsch.
Es existiert also keine Lösung von $A_L \vec{x} = \vec{a}$.

(iv) Es gilt:

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{x} \text{ und } \vec{a} \text{ sind linear abhängig} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, r \in \mathbb{R} : \vec{x} = r \cdot \vec{a}, \text{ da } \vec{a} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \text{Kern } L = \{ r \cdot \vec{a} \mid r \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \dim \text{Kern } L = 1.$$

Aus

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Kern } L + \dim \text{Bild } L \text{ und } \dim \text{Bild } L = \text{rang } A_L$$

folgt damit

$$\text{rang } A_L = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kern } L = 3 - 1 = 2.$$

Wir haben also $\dim \text{Kern } L = 1$ und $\text{rang } A_L = 2$.

Rechenteil

1. Aufgabe:

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= (1-\lambda)^2 - 11 = \lambda^2 - 2\lambda^2 \\
&= \lambda(\lambda - 2).
\end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$.

(ii) Scharfes Hinsehen liefert:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ist ein Eigenvektor zu } \lambda_1 = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2.$$

(iii) Die so definierten Matrizen D und S erfüllen gerade $A = SDS^{-1}$ (*was man auch aufwendig nachrechnen könnte...*).

2. Aufgabe:

(i) Sei die definierte lineare Abbildung mit L bezeichnet, die gesuchte Darstellungsmatrix mit D_L. Ich stelle die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4$ als Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_4$ dar:

$$\begin{aligned}
L(\vec{e}_1) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{f}_1 + \frac{1}{4}\vec{f}_2 \\
L(\vec{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \vec{f}_2 + \frac{1}{4}\vec{f}_3 \\
L(\vec{e}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{f}_4 + \frac{1}{4}\vec{f}_5 \\
L(\vec{e}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \vec{f}_5 + \frac{1}{4}\vec{f}_6
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L(\vec{e}_1), \dots, L(\vec{e}_4) \\ \text{haben Koordinaten} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow D_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe:

(i) $\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} (1+0+1) - (0+0+0) = 2.$

Da $\det B = 2 \neq 0$ ist B invertierbar, d.h. B hat vollen Rang, also $\operatorname{rang} B = 3$.

(ii) Zu $i \in \{1,2,3\}$ wird ein Vektor $\vec{c}_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{3i} \end{pmatrix}$ gesucht mit $\vec{a}_i = c_{1i}\vec{b}_1 + c_{2i}\vec{b}_2 + c_{3i}\vec{b}_3$ was aber nichts anderes heißt, als daß $\vec{a}_i = B\vec{c}_i$. Um diese Gleichungen zu lösen, berechne ich zunächst B^{-1} mit Hilfe des erweiterten Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{c|c} B & E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1.\text{Zeile} \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2.\text{Zeile} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +\frac{1}{2} \cdot 3.\text{Zeile} \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{1}{2} \cdot 3.\text{Zeile} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\vec{c}_1 = B^{-1}\vec{a}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 4\vec{b}_3.$$

$$\vec{c}_2 = B^{-1}\vec{a}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{3}{2}\vec{b}_3.$$

$$\vec{c}_3 = B^{-1}\vec{a}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_3 = 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3.$$

(iii) Es ist $B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 4 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ da dies genau eine Zusammenfassung von dem ist, was in (ii) gerechnet wurde.