TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Pohst / Lusala

Prüfungs-/Übungsschein-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[1] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an und begründen Sie Ihren Lösungsweg. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	5	$\sum$

[1] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Achtung: Notation des Gauß-Algorithmus

Notieren Sie jeden Gaußalgorithmus in Matrizenschreibweise und dokumentieren Sie jeden einzelnen Schritt wie folgt:

Hier wird auf die 3. Zeile das (-3)-fache der 1. Zeile addiert.

Ansonsten droht drastischer Punktabzug!

Rechenaufgaben

1. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukts

$$< \vec{x}, \vec{y} > := \vec{x}^T \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \qquad \left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right).$$

(a) Orthogonalisieren Sie die Basis

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Stellen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der neuen Basis dar.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 22x_3 & - & 33x_4 & + & 37x_5 & = & -35 \\ 7x_1 & - & 7x_2 & + & 18x_3 & - & 15x_4 & - & 9x_5 & = & 9. \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{0}, \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^5).$$

Beachten Sie die Hinweise zur Notation des Gaußalgorithmus!

(ii) Ist der Vector $\vec{x} = (3,0,1,2,0)^T \in \mathbb{R}^5$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems?

(iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A.

b) Zeigen Sie, daß 1 ein Eigenwert zu A ist.

c) Betrachten Sie A als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie den Eigenraum von A zum Eigenwert 1.

d) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t), \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{y}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist. Hinweis: Man benutze die Eigenwertmethode und beachte, daß $\vec{y}(0)$ ein Eigenvektor von A ist, der linear unabhängig von den Eigenvektoren zu den anderen Eigenwerten ist.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_1 = (0,5,2,8)^T \in \mathbb{R}^4$ von der Ebene durch $P_0 = (1,2,3,4)^T$, die von $\vec{v}_1 = (2,0,2,0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0,2,2,0)^T$ im $\mathbb{R}^4$ aufgespannt wird.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

für $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Pohst / Lusala

Prüfungs/-Übungsschein-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[2] (geschützt durch ein Passwort).

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie außer bei Aufgabe 6 immer eine **kurze Begründung** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

6	7	8	$\sum$

[2] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Verständnisaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Kreuzen Sie in dieser Aufgfabe "wahr" oder "falsch" an. Jede richtige Antwort ergibt 1 Punkt, jede falsche Antwort -1 Punkt. Keine Antwort ergibt 0 Punkte. Die Gesamtbewertung der Aufgabe ergibt stets mindestens 0 Punkte.

(a) 0 ist ein Eigenwert zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist diagonalisierbar.

(c) Die räumlichen Diagonalen eines Quaders Q im $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.
($Q = \{\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 | \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ sind orthogonal und nicht $\vec{0}$.)

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

(e) Für eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist $\dim L(\mathbb{R}^m) \leq m$.

(f) Je zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x}^T \cdot \vec{y} = 0$ sind linear abhängig.

(g) Die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}$ sind für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig stets linear unabhängig.

(h) Die Gesamtheit der reellen Lösungen von $y''(x) + y(x) = 0$ besteht aus

$$\{c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) | \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Entscheiden Sie bitte, welche der obigen Aussagen wahr oder falsch sind. (Zutreffendes bitte ankreuzen, ohne Angabe einer Begründung.)

	wahr	falsch
(a)	○	○
(b)	○	○
(c)	○	○
(d)	○	○
(e)	○	○
(f)	○	○
(g)	○	○
(h)	○	○

2. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2+2b & -3 \\ 1 & -2 & 3+b \end{pmatrix}$.

1. Für welche $b \in \mathbb{R}$ existiert die inverse Matrix A^{-1}?
   Begründen Sie die Antwort auf zwei Weisen (ohne A^{-1} auszurechnen) unter Verwendung der Begriffe

   (i) Determinante von A,
   (ii) Rang der Matrix A.

2. Entscheiden Sie (ohne eine Begründung anzugeben), ob für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(i) für $b = 0$	☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar	ist.
(ii) für $b = 1$	☐ lösbar ☐ eindeutig lösbar ☐ nicht lösbar	ist.

3. Für welche Werte von $b \in \mathbb{R}$ sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad \left(\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2\right)$$

und einen Vektor $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ der Länge eins, d.h. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} P\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2, \\ & \vec{x} & \longmapsto & P(\vec{x}) = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} \end{array}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) P ist linear.
(ii) $P^2 = P$. (Beachte: $P^2(\vec{x}) = P\big(P(\vec{x})\big)$.)
(iii) $\vec{a}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 0.
(iv) Der Kern von P hat die Dimension 1.
(v) Das Bild von P hat die Dimension 1.

Hinweis: Verwenden Sie für (iv) und (v), dass $\{\vec{a}, \vec{a}^\perp\}$ mit $\vec{a}^\perp = \left(\begin{smallmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.