Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Seiler, Rambau, Wiehe, Gentz, Scherfner
Körner, Schulz-Baldes, Schwarz

WS 2001/02

Lösungen zur Klausur am 20.2.2002 - Rechenteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: 10 Punkte

(i) (2 Punkte) z.B. $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -5 \neq 0$ (1 Punkt), somit linear unabhängig (1 Punkt). Alternative Lösungen möglich.

(ii) (3 Punkte) Ansatz des Gleichungssystems (1 Punkt), Lösung des Systems mit Gauss (1 Punkt), Angabe der Lösung $\vec{b} = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ (1 Punkt).

(ii) (5 Punkte) Erster normierter Vektor $\vec{e}_1 = \vec{v}_1$ (1 Punkt). Zweiter (noch nicht normierter) Vektor $\vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = \vec{v}_2$ (1 Punkt), normierter Vektor $\vec{e}_2 = \|\vec{v}_2\|^{-1} \vec{v}_2$ (1 Punkt). Dritter (noch nicht normierter) Vektor

$$\vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(1 Punkt).}$$

Normierung $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (1 Punkt).

2. Aufgabe: 6 Punkte

Berechnung der Adjungierten (2 Punkte)

$$M^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnung des Produktes (2 Punkte)

$$MM^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} .$$

Schluss, dass M nicht unitär (2 Punkte).

Alternative: Beweis das Skalarprodukt nicht erhalten bleibt $\langle M\vec{v}, M\vec{w} \rangle \neq \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ für geeignete $\vec{v}$, $\vec{w}$. (4 Punkte), Schluss , dass M nicht unitär (2 Punkte).

3. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (5 Punkte) richtige Formel (4 Punkte), irreduzible Zerlegung (1 Punkt)

$$\det(A - \lambda E_3) \;=\; (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ -1 & -a-\lambda \end{pmatrix} \;=\; -\lambda(\lambda-2)(\lambda-(1-a))\ .$$

(ii) (2 Punkte) 0, 2, $(1-a)$.

(iii) (2 Punkte) 0, 2, $(1-a)$ da alle reell.

(iv) (3 Punkte) Dimension des Kernes ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren des Eigenwertes 0. Wenn $a \neq 1$, diese ist 1 da dann 0 ein einfacher Eigenwert ist (1 Punkt). Wenn $a = 1$ überprüft man, dass es nur einen Eigenwert zur doppelten Nullstelle 0 gibt (1 Punkt). Somit ist die Dimension des Kernes auch dann gleich 1 (1 Punkt).

4. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (4 Punkte) Mit Rechenschritten:

$$B^2 \;=\; B\,B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}\ ,$$

$$BDB^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}\ .$$

(ii) (4 Punkte) Mit Rechenschritten:

$$e^{At} \;=\; Be^{Dt}B^{-1} \;=\; B\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}B^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}\ .$$

(iii) (4 Punkte)

$$\vec{y}(t) \;=\; e^{At}\,\vec{y}(0) \;=\; \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}\ .$$