Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 01/02
Seiler, Rambau, Wiehe, Gentz, Scherfner 20. 02. 2002

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Teilmengen des Raumes aller reellen Polynome vom Grad höchstens vier, $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ sind Untervektorräume ? (Zutreffendes bitte ankreuzen, ohne Angabe einer Begründung.)

	wahr	falsch
$U_1 := \{ P \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] \mid P(1) = P(0) = 0\}$	○	○
$U_2 := \{Q \in \mathbb{R}_{\leq 4}[x] \mid Q(0) = 1\}$	○	○
$U_3 := \operatorname{span}\{x+1\,,\ x^2-1\}$	○	○
$U_1 \cup U_3$	○	○

2. Aufgabe 10 Punkte

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $B := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\det(B) = 0$?

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Spalten der Matrix B linear unabhängig?

(iii) Ist die Matrix B für $a = 2$ invertierbar?

(iv) In dem Fall $a = 2$, liegt der Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ im Bild der durch $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$ auf dem $\mathbb{R}^3$ gegebenen linearen Abbildung?

(v) Im Fall $a = 1$, liegt der Vektor $\vec{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ im Bild der durch $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$ auf dem $\mathbb{R}^3$ gegebenen linearen Abbildung?

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$C := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und bestimmen Sie dessen Nullstellen.

(ii) Betrachten Sie die lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$. Was ist ihre geometrische Bedeutung? Machen Sie eine Skizze.

(iii) Betrachten Sie weiterhin die lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$. Was sind ihre Eigenwerte? Falls es solche gibt, finden Sie zu jedem von ihnen einen Eigenvektor.

(iv) Betrachten jetzt Sie die lineare Abbildung auf dem $\mathbb{C}^2$ (und nicht $\mathbb{R}^2$) gegeben durch $\vec{x} \mapsto C\vec{x}$. Was sind ihre Eigenwerte? Geben Sie zu jedem von ihnen einen Eigenvektor an.

4. Aufgabe 12 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$. Gegeben sind die zwei Vektoren

$$\vec{a} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{b} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und die lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$S(\vec{x}) := \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \, \vec{a} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \, \vec{b} .$$

(i) Zeigen Sie, dass $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(ii) Berechnen Sie $S\vec{a}$ und $S\vec{b}$ und skizzieren Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$, $S\vec{a}$ und $S\vec{b}$ in der Ebene.

(iii) Die Abbildung S ist eine Geradenspiegelung. An welcher Gerade wird gespiegelt?

(iv) Geben Sie die darstellende Matrix von S bezüglich der Standardbasis $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ an.

(v) Geben Sie eine Basis für das Bild von S an.