Technische Universität Berlin **SS 20002**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Faermann, Steinbach
Bollhoefer, Kato, Schulz-Baldes

Lösungen zur Klausur am 24.7.2002 - Rechenteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: 12 Punkte

(i) (2 Punkte) $\det(A - \lambda E) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(a-\lambda)$
(ii) (2 Punkte) Nullstellen $-1, 1, a$
(iii) (1 Punkt) Eigenwerte $-1, 1, a$
(iv) (2 Punkte) Die Dimension ist gleich 0 für $a \neq 0$ und gleich 1 wenn $a = 0$.
(v) (5 Punkte) Aufstellen des richtigen Gleichungssystems $(A - (-1)E)\vec{x} = \vec{0}$ (2 Punkte). Berechnung (2 Punkte) und Angabe (1 Punkt) der Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe: 10 Punkte

(i) (2 Punkte) $\det(B) = 0$
(ii) (2 Punkte) Ja, linear abbhängig, weil die Determinante verschwindet.
(iii) (4 Punkte) Gauss richtig angesetzt (1 Punkt) Rechnung (2 Punkte) Angabe des Lösungsraumes $\left\{ \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}$. (1 Punkt)
(iv) (2 Punkte) $2\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

3. Aufgabe: 10 Punkte

(i) (3 Punkte) Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$ (1 Punkt). Lösungen der homogenen Gleichung $y_h(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}$ wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (2 Punkte).
(ii) (3 Punkte) Ansatz: $y_p(x) = ax + b$ (1 Punkt) Lösung $y_p(x) = \frac{1}{2}x$ (2 Punkte)
(iii) (1 Punkt) $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$
(iv) (3 Punkte) $c_1 = 13/12$, $c_2 = 23/12$, so dass $y(x) = 13\, e^{-4x}/12 + 23\, e^{2x}/12 + \frac{1}{2}x$

4. Aufgabe: **8 Punkte**

(i) (4 Punkte) Mit Rechenschritten:

$$\|r\|^2 \;=\; \int_0^1 (2x-1)^2\, x dx \;=\; x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{6}\;.$$

Somit ist das normalisiert Polynom $\hat{r} = \sqrt{6}r$.

(ii) (4 Punkte) Die Projektion ist gegeben durch $\langle s, \hat{r}\rangle\, \hat{r} = 6\langle s, r\rangle\, r$. Also wird berechnet

$$\langle s, r\rangle \;=\; \int_0^1 x^2(2x-1)\, x dx\; \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 \;=\; \frac{3}{20}\;,$$

so dass die Projektion $\frac{9}{10}\, r$ ist.