Technische Universität Berlin **SS 2002**

Fakultät II – Institut f. Mathematik

Doz. Faermann, Steinbach

Ass. Bollhöfer, Kato, Schulz-Baldes

Musterlösungen zur Klausur am 09.10.2002 - Verständnisteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: 10 Punkte

Teil *(i)*
Bilde $A\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2$, $A\vec{v}_3$, streng genommen reicht je eine Komponente von $A\vec{v}_i, i = 1,2,3$ (restliche Komp. in Klammern)

$$
\begin{array}{rrr||r|r|r}
 & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline\hline
0 & -2 & 2 & 2 & -2 & (0) \\
-1 & -1 & 1 & (0) & (-2) & 0 \\
1 & -1 & 1 & (2) & (0) & (0)
\end{array}
$$

Koeffizientenvergleich $A\vec{v}_i$ mit $\lambda_i v_i, i = 1,2,3 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$

Teil *(ii)*
Die Eigenwerte von B stimmen mit denen von A überein.
Begründung (z.B. char. Polynome haben gleiche Nullstellen oder A und B sind ähnlich).

2. Aufgabe: 10 Punkte

	linear	nicht
Translation (Verschiebung) um den Vektor $\vec{w}$	$\bigcirc$	$\otimes$
Rotation um x-Achse um π, gefolgt von Rotation um z-Achse um $\frac{\pi}{2}$	$\otimes$	$\bigcirc$
Rotation um x-Achse um π, gefolgt von Translation um $\vec{w}$	$\bigcirc$	$\otimes$
Spiegelung an der z-Achse	$\otimes$	$\bigcirc$
Projektion auf den von $\vec{w}$ aufgespannten Unterraum	$\otimes$	$\bigcirc$

3. Aufgabe: 10 Punkte

Teil *(i)*
Nein. Begründung. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $aQ_1(x) + bQ_2(x) = 0 \Rightarrow (2a)x + (2b)x^2 = 0$.
Koeff. vor Potenzen x und x^2 müssen 0 sein $\Rightarrow a = b = 0$

Teil *(ii)*
Ja. Begründung. Dimension des von P_1, P_2, P_3 aufgespannten Raumes ist $\leqslant 2$ (lineare Fktn.)

Teil *(iii)* $P_3(x) = 2P_1(x) - 2P_2(x)$

Teil *(iv)*
Dimension kann nicht größer als 2 sein, weil maximal alle linearen Fktn. der Form $ax + b$ darstellbar sind, diese sind aber offensichtlich darstellbar.

4. Aufgabe: **10 Punkte**

Teil *(i)*
Einsetzen von y_1, y_2, y_3 in die Dgl. liefert
$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 0$, $y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = 16e^{2x} \neq 0$, $y_3'' + 4y_3' + 4y_3 = 0$. $\Rightarrow y_1, y_3$ sind Lösungen.

Teil *(ii)*
Ja. Begründung. Wronski-Matrix W

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad y_1 & \quad y_2 & \qquad y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_{1,2,3} \\ y'_{1,2,3} \\ y''_{1,2,3} \end{array} & \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} & (1-2x)e^{-2x} \\ 4e^{-2x} & 4e^{2x} & 4(x-1)e^{-2x} \end{pmatrix} \end{array}$$

Wähle z.B. $x = 0$ und mache z.B. Gauss

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 1 & 0 & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 4 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 4 & 1 & II \to II + 2I \\ 0 & 0 & -4 & III \to III - 4I \end{array}$$

$\Rightarrow \det W(0) = -16 \neq 0$

Teil *(iii)*
Berechne char. Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \equiv \lambda = -2$
Lösungen des hom. Gleichungssystems sind $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$ (wg. doppelter Nullstelle), d.h. y_1 und y_3 bilden Fundamentalsystem