Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 02/03
Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow, Unterreiter, Wiehe 19.02.2003

Februar – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurgebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem separaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(*i*) Geben Sie das charakteristische Polynom an.

(*ii*) Bestimmen Sie die Nullstellen des charakteristische Polynomes. Was sind die Eigenwerte von A?

(*iii*) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaussalgorithmus die Eigenvektoren des Eigenwertes $\lambda = 1$.

(*iv*) Geben Sie einen Hauptvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ an, der nicht Eigenvektor ist.

2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(*i*) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ in Abhängigkeit von a.

(*ii*) Für welche Werte von a sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear abhängig? Warum?

(*iii*) Sei a einer der in (*ii*) bestimmten Werte. Geben Sie $\vec{v}_3$ als Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ an.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix B mit 2 normalisierten Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(*i*) Was sind die zugehörigen Eigenwerte λ_1 und λ_2 von B?

(*ii*) Sei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Bilden Sie die 2×2 Matrix $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, berechnen Sie C^{-1} und zeigen Sie, dass

$$C^{-1}BC = D .$$

(*iii*) Berechnen Sie die Lösung das Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = B\,\vec{y}(t) , \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 1 .$$

(i) Berechnen Sie eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (eine solche Basis heißt auch Fundamentalsystem).

(ii) Geben Sie eine partikuläre Lösung für obige Differentialgleichung an.

(iii) Geben Sie alle Lösungen für obige Differentialgleichung an.

(iv) Bestimmen Sie nun die Lösung, welche folgenden Anfangsbedingungen genügt:

$$y(0) = 1 , \qquad \frac{dy}{dx}(0) = 1 .$$