Technische Universität Berlin **WS 02/03**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Bollhöfer, Scherfner, Scheutzow, Unterreiter, Wiehe
Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Klausur am 20.2.2002 - Verständnisteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.moses.tu-berlin.de/Mathematik/

---

1. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (2 Punkte) Die Lösungen sind $t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$.

(ii) (2 Punkte) Der Rang ist 2, da 3. Zeile gleich 1., und die beiden ersten sind linear unabhängig.

(iii) (2 Punkte) $\mathrm{Kern}(A)=\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

(iv) (2 Punkte) Ein partikuläre Lösung ist $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Alle Lösungen sind

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(v) (2 Punkte) Ja, denn die Matrix ist symmetrisch.

(vi) (2 Punkte) Ja, denn die Matrix ist symmetrisch.

2. Aufgabe: **10 Punkte**

Dies zeigt man durch Anwenden der (allgemeinen) Axiome eines Skalarproduktes.

(i) (5 Punkte) Wegen der Linearität und Symmetrie des Skalarproduktes:

$$\begin{aligned}\langle\vec v+\vec w,\vec v-\vec w\rangle &= \langle\vec v,\vec v\rangle-\langle\vec v,\vec w\rangle+\langle\vec w,\vec v\rangle-\langle\vec w,\vec w\rangle\\ &= \langle\vec v,\vec v\rangle-\langle\vec w,\vec w\rangle\\ &= \|\vec v\|^2-\|\vec w\|^2\ ,\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\|\vec v\|^2=\langle\vec v,\vec v\rangle$. Verschwindet nun die linke Seite, so ist $\|\vec v\|^2=\|\vec w\|^2$, und umgekehrt.

(i) (5 Punkte) Ähnlich zeigt man

$$\|\vec v+\vec w\|^2 = \langle\vec v+\vec w,\vec v+\vec w\rangle = \|\vec v\|^2+2\langle\vec w,\vec v\rangle+\|\vec w\|^2\ ,$$

woran man sogleich die gewünschte Äquivalenz ablesen kann.

3. Aufgabe: **8 Punkte**

falsch/wahr/falsch/wahr (je 2 Punkte für richtige Antwort)

4. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (4 Punkte)

$$W(x) \;=\; \begin{pmatrix} x & x^2 & e^x - 1 \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{pmatrix} .$$

(ii) (3 Punkte) Hier kann nicht $x = 0$ gewählt werden, da dann die erste Zeile gleich der Nullzeile ist. Hingegen, für z.B. $x = 1$ kann man die Determinante einfach berechnen:

$$\det(W(1)) \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & e-1 \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 2 & e \end{pmatrix} \;=\; e - 2 \;\neq\; 0 .$$

Hieraus folgt, dass die Funktionen linear unabhängig sind.

(iii) (3 Punkte) Dies ist nicht möglich, da die konstante Funktion nicht im Spann von f_1, f_2, f_3 liegt. Alternativ kann man mit Hilfe des Wronski Tests mit den 4 Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 wie oben überprüfen (und jetzt sogar $x = 0$ wählen), dass diese Funktionen linear unabhängig sind.