Technische Universität Berlin **SS 2003**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Faermann, Hombach, Seiler
Kato, Pavlioukevitch, Schulz-Baldes

Lösungsskizzen zur Klausur, 23. Juli, SS 03 - Rechenteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

---

1. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (3 Punkte) Lösung des homogenen Systems:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x_3 = 3x_2$. Aus der ersten $2x_1 = -x_2 - 3x_3 = -10x_2$. Somit:

$$\text{kern}(A) := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) (2 Punkte) Es ist in der Tat

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(iii) (3 Punkte) Lösungsmenge des inhomgenen Systems = Partikulärlösung von oben plus homogene Lösung, also Kern. Damit:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

(iv) (2 Punkte) Der Rang ist zwei, siehe letzte Zeile des Gauß-Algorithmus vom ersten Aufgabenteil.

(v) (2 Punkte) $det(A) = 0$.

2. Aufgabe: **8 Punkte**

(i) (3 Punkte) Aus

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, somit die lineare Unabhängigkeit.

(ii) (2 Punkte) Da die drei Matrizen linear unabhngig sind, ist die Dimension gleich drei.

(ii) (3 Punkte) Es gilt

$$-3B_1 + 4B2 + 2B_3 = -3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe: **8 Punkte**

Normieren von $\vec{x}_1$ ergibt (2 Punkte)

$$\|\vec{x}_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\vec{f}_2$ ergibt (2 Punkte)

$$\begin{aligned} \vec{f}_2 &= \vec{x}_2 - < \vec{x}_2, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{18 + 0 + 32}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Normierung ergibt sich damit (1 Punkt)

$$\|\vec{f}_2\| = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechung von $\vec{f}_3$ ist dann (2 Punkte)

$$\begin{aligned} \vec{f}_3 &= \vec{x}_3 - < \vec{x}_3, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 - < \vec{x}_3, \vec{e}_2 > \vec{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3 \cdot 25}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 - 9 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normierung ergibt: (1 Punkt)

$$\|\vec{f}_3\| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe: **12 Punkte**

(i) (4 Punkte) Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. Nun zur Berechnung der Eigenvektoren. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(ii) (3 Punkte) Damit ist die S^{-1}-Matrix gegeben durch

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Inversen S entweder direkt durch explizite Formel mit $\det(S) = 2$, oder durch Gau-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit folgt

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}S^{-1} \Rightarrow SBS^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

also die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen.

(iii) (3 Punkte) Berechnung der Exponentialreihe erfolgt in der Diagonalisierung von B. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= S^{-1}\left[\exp t\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] S = S^{-1}\begin{pmatrix} \exp(3t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} S \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(3t) & \exp(-t) \\ \exp(3t) & -\exp(-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(3t)+\exp(-t) & \exp(3t)-\exp(-t) \\ \exp(3t)-\exp(-t) & \exp(3t)+\exp(-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iv) (2 Punkte) Es ist

$$\vec{x}(t) = e^{Bt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(3t)+\exp(-t) \\ \exp(3t)-\exp(-t) \end{pmatrix} \,.$$