A

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik

Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04

7. April 2004

April – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Lösen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Determinante von A.

2. Aufgabe

9 Punkte

Im Vekorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben mit

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B}_2 := \{\vec{w}_1 := \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_2 := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}.$$

(i) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix S für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} := \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

Außerdem betrachten wir die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

(iii) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(iii) Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls A nicht diagonalisierbar ist, begründen Sie, wieso die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = \cos(t) \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$x(0) = 1, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \tag{2}$$

(i) Leiten Sie mit dem Exponentialansatz die charakteristische Gleichung für die zu (1) gehörende **homogene** Differentialgleichung her.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **homogenen** Differentialgleichung.

(iii) Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) := \frac{1}{2}t \cdot \sin(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (1) gegeben ist.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (1).

(v) Lösen Sie das Anfangswertproblem (1), (2).