1 Lösungen Verständnisteil A

1.1 Aufgabe 1

1. Die Ausgabe beinhaltet die Angabe der Eigenwerte, ihrer algebraischen Vielfachheit sowie eine Basis des jeweiligen Eigenraumes, und somit auch die geometrischen Vielfachheiten. Konkret:

   Sechs ist Eigenwert mit zweifacher algebraischer Vielfachheit und Eigenbasis $\{(2,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$, 12 ist Eigenwert mit einfacher algebraischer Vielfachheit, der Eigenraum wird aufgespannt von $(1,-2,1)^T$.

2. Ja. Da die algebraische Vielfachheit immer gleich der geometrischen Vielfachheit ist, muss somit B diagonalisierbar sein.

3. $$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

   Oder jede Permutation von 6, 12 auf der Diagonalen.

4. Der Kern der Matrix M wird vom Vektor $(1,-2,1)^T$ aufgespannt.

5. Da M offenbar nichttrivialen Kern besitzt, ist M nicht invertierbar.

1.2 Aufgabe 2

1. $$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ N^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Alle Eigenwerte sind 0, da

   $$\begin{aligned} \det(N - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda &= 0 \end{aligned}$$

3. Eigenvektoren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4. N ist nicht diagonalisierbar, da $\lambda = 0$ die algebraische Vielfachheit 3, aber die geometrische Vielfachheit 1 besitzt.

5. Offenbar verschwindet die dritte und alle weiteren Potenzen von N. Somit:

$$\begin{aligned} \exp(tN) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Die Lösung des Anfangswertproblemes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) = \exp(tN)\vec{y}(0) &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 3t + t^2 \\ 3 + 2t \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

1. falsch
2. richtig
3. falsch
4. richtig
5. richtig

1.4 Aufgabe 4

1. Vier Polynome in einem Vektorraum der Dimension 3 sind immer linear abhängig. Alternativ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

2. Entweder ablesen $x = p_4(x) - p_1(x)$ oder nachrechnen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow 2\lambda_3 + \lambda_4 = 1 & \text{Wähle etwa } \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 & \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -1 \end{array}$$

3. Die einfachst-mögliche Wahl ist offensichtlich

$$b_1(x) = 1, b_2(x) = x, b_3(x) = x^2$$

4. Durch Nachzählen: Die Dimension ist offenbar gleich drei.