# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** WS 04/05
**Lübbecke, Mehrmann, Nabben, Schwandt, Seiler** 23. Februar 2005

## Februar – Klausur (Rechenteil)
## Lineare Algebra für Ingenieure

Name: ............................... Vorname: ...............................

Matr.–Nr.: ........................... Studiengang: ...........................

---

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ \alpha & \alpha & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $A$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A$ invertierbar?

(c) Sei $\alpha = 4$. Bestimmen Sie Kern und Bild der Abbildung

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{x} \mapsto A\vec{x}.$$

Geben Sie für Kern und Bild jeweils eine Basis an.

## 2. Aufgabe

8 Punkte

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $S$ der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(Laut Definition ist $S$ die Matrix, für die $\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = S\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt. Dabei ist $\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ der Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$ und $\vec{x}_{\mathcal{B}_2}$ der Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$.)

## 3. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix $B$.

(b) Diagonalisieren Sie die Matrix $B$, d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D$, so dass $D = SBS^{-1}$ gilt, und geben Sie $S$ und $S^{-1}$ an.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = B\vec{y}(t),\ t > 0, \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 4. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an, um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarproduktes zu erhalten.