TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 04/05

Fakultät II - Mathematik

M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Februar-Klausur

Stand: 25. Februar 2005

---

1. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Alternative Lösungswege

(i) Laplace-Entwicklung nach der 1. Zeile

$$\begin{aligned}
\det A &= 1\det\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ \alpha & 5 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1})\\
&= 4\cdot 5 - (-1\cdot\alpha) + 3(2\alpha - 4\alpha) \quad (\mathbf{1})\\
&= 20 + \alpha + 6\alpha - 12\alpha\\
&= 20 - 5\alpha \quad (\mathbf{1})
\end{aligned}$$

(ii) Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}
\det A &= 1\cdot 4\cdot 5 + 0 + 3\cdot 2\cdot\alpha - (3\cdot 4\cdot\alpha + 1\cdot(-1)\cdot\alpha + 0) \quad (\mathbf{1})\\
&= 20 + 6\alpha - 12\alpha + \alpha\\
&= 20 - 5\alpha \quad (\mathbf{2})
\end{aligned}$$

(iii) Gaussalgorithmus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ \alpha & \alpha & 5 \end{bmatrix} \overset{II-2I, III-\alpha I}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & \alpha & 5-3\alpha \end{bmatrix} \overset{III-\frac{\alpha}{4}II}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5-\frac{5}{4}\alpha \end{bmatrix} \quad (\mathbf{2})$$

Da man nur elementare Zeilenumformungen gemacht hat und dabei keine Zeilenvertauschungen vorgenommen hat, ist die Determinante von A gleich der Determinante der neu berechneten Matrix in ZSF: $\det A = 1\cdot 4\cdot(5-\frac{5}{4}\alpha) = 20-5\alpha$ **(1)**

(b) Invertierbarkeit von A

A inv.bar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \overset{(\mathbf{1})}{\Leftrightarrow} 20 - 5\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 4. \quad (\mathbf{1})$

(c) Kern von $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} =: \tilde{A}$ mit Gauß

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} (II-2I, III-4I) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} (III-II) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{2})$$

Auflösen mit x_1, x_2 als Kopfvariablen und x_3 als freier Variable (=Parameter).

$$II: 4x_2 - 7x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{7}{4}x_3$$
$$I: x_1 + 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3x_3 \quad (\mathbf{1})$$

Damit alternativ $\quad(\mathbf{1})$

- Kern $(\tilde{A}) = \{x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{7}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \big| x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3 \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \big| x_3 \in \mathbb{R}\}$
- Basis des Kerns von $\tilde{A} = \{\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}\}$
- Kern $\tilde{A} = $ Span $\{\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}\}$

KEINEN Punkt gibt es, wenn nur ein einzelner uninterpretierter Vektor dasteht.

c) Bild von $\tilde{A}$. Alternative Lösungsmöglichkeiten

(i) Mit Gauß: $\tilde{A}^T$ in ZSF überführen. Dann sind die nicht-Null-Zeilen als Spalten geschrieben eine Basis des Bildes.

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} (III - 3I) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} (III + \frac{7}{4}II) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{2})$$

Man erhält als Basis des Bildes von $\tilde{A}: \{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\}$ oder $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

$(\mathbf{1})$

(ii) Ohne Gauß: Bild von $\tilde{A} = $ Span $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\}$ $\quad(\mathbf{1})$. Es ist (z.B.)

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{7}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ und darum $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \in$ Span $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\}$, so dass Bild von $\tilde{A} = $ Span $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\}$ $\quad(\mathbf{1})$. Einen weiteren Vektor kann man nicht weglassen, da die verbleibenden beiden Vektoren linear unabhängig sind. Man erhält $\quad(\mathbf{1})$ für eine der beiden Begründungen

- Die beiden Vektoren sind keine Vielfachen voneinander.
- Überprüfen der Definition der linearen Unabhängigkeit:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und mit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} (II-2I, III-4I) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} (III-II) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

folgt, dass die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems als $\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ gegeben ist, also $\alpha = \beta = 0$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Alternative Lösungsmöglichkeiten.

i) Mit den Koordinatenabbildungen.
$K_{\mathcal{B}_1} \overset{(\mathbf{1})}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$, was man nicht auszurechnen braucht, denn man benötigt nur $K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $(\mathbf{1})$.
$K_{\mathcal{B}_2} \overset{(\mathbf{1})}{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $(\mathbf{2})$
Damit $S \overset{(\mathbf{1})}{=} K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{(\mathbf{1})}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $(\mathbf{2})$.

ii)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\overset{(\mathbf{1})}{=} s_{1,1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s_{2,1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ s_{2,1} \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} s_{1,1} \\ s_{2,1} \end{bmatrix} \overset{(\mathbf{1})}{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} (\mathbf{2}) \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} &\overset{(\mathbf{1})}{=} s_{1,2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s_{2,2} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,2} \\ s_{2,2} \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} s_{1,2} \\ s_{2,2} \end{bmatrix} \overset{(\mathbf{1})}{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (\mathbf{2})
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (14 Punkte)

(a) Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 4), \quad (\mathbf{1})$$

d.h. die Matrix B besitzt zwei Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ $(\mathbf{2})$.
Eigenvektoren:
Die Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu $\lambda_1 = 1$ sind die nichttrivialen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(B - I_2)\vec{v}_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{v}_1 = 0, \quad (\mathbf{1})$$

etwa $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\quad$ (**1**)
Analog ist $\vec{v}_2$ ist eine nichttriviale Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(B - 4I_2)\vec{v}_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{v}_2 = 0,$$

etwa $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (**1**).

(b) Die Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ einer entsprechenden Matrix S^{-1} sind Eigenvektoren von B zu Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2.

Wir setzen $S^{-1} \overset{(\mathbf{1})}{:=} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, d.h. $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (**1**), und erhalten $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ (**1**) so dass $S^{-1}DS = B$.

(c) Die Lösung des Anfangwertproblems lautet

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \mathrm{e}^{tB}\,\vec{y}(0) \ \ (\mathbf{1}) \\ &= S^{-1}\mathrm{e}^{tD}S \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1}) \\ &= \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^{4t} \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{4t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{2}). \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(6 Punkte)

Es bezeichne $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ die Orthonormalbasis, die wir mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ erhalten.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{||\vec{v}_1||}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}; \ \ (\mathbf{2})$$

Ist der erste Basisvektor nicht richtig, aber die Norm richtig berechnet, kann ein Punkt gegeben werden.
Für den 2. Basisvektor fällen wir das Lot

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 - <\vec{v}_2, \vec{b}_1> \vec{b}_1 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{25}\left\langle \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}. \ \ (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

Wurde das Lot nicht richtig bestimmt, aber das Skalarprodukt richtig berechnet, kann ein Punkt gegeben werden.
Normieren des Lots

$$\vec{b}_2 \overset{(\mathbf{1})}{=} \frac{\vec{v}_2 - <\vec{v}_2, \vec{b}_1> \vec{b}_1}{||\vec{v}_2 - <\vec{v}_2, \vec{b}_1> \vec{b}_1||} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1})$$