Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 04/05
Lübbecke, Mehrmann, Nabben, Schwandt, Seiler 23. Februar 2005

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Bei dieser Aufgabe sind keine Begründungen erforderlich!

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Welche Aussagen können Sie treffen über

(a) die Determinante von A?

(b) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$?

(c) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebiges $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$?

(d) den Rang von A?

(e) den Kern von A?

(f) die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit der Zeilenvektoren von A?

2. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten an.

(b) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A an, ohne Eigenvektoren auszurechnen.

(c) Ist A diagonalisierbar?

(d) Geben Sie die Determinante von A an.

(e) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A^2 an, ohne A^2 selbst auszurechen.

Begründen Sie Ihre Antworten!

3. Aufgabe 8 Punkte

Geben Sie jeweils **mit Begründung** an, ob es sich bei der Menge U um einen Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2,2}$ handelt.

(a) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

(b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

4. Aufgabe 10 Punkte

Sei $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V und $\|\, .\, \|$ die assoziierte Norm. Ferner seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ genau dann, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

(b) $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w} \rangle = 0$ genau dann, wenn $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.