TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 04/05
Fakultät II - Mathematik
M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Februar-Klausur

Stand: 25. Februar 2005

Verständnisteil

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Welche Aussagen können Sie treffen über

(a) die Determinante von A:
$\det A \neq 0$ **(1 Punkt)**,

(b) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$:
$\vec{x} = \vec{0}$ ist die einzige Lösung **(2 Punkte)**. (Wird nur angegeben, dass es eine eindeutige Lösung gibt (ohne $\vec{x} = \vec{0}$ zu nennen), gibt es 1 von 2 Punkten.)

(c) die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebiges $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$:
Das Gleichungssystem besitzt ebenfalls eine eindeutige Lösung **(1 Punkt)**.

(d) den Rang von A:
A hat vollen Rang **(2 Punkte)**.

(e) den Kern von A:
der Kern besteht nur aus dem Nullvektor, d.h. $\text{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$ **(2 Punkte)**.

(f) die lineare Abhängigkeit/ Unabhängigkeit der Zeilenvektoren von A:
die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig **(2 Punkte)**.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} .$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten an:
Die Eigenwerte lauten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$ und $\lambda_4 = 10$ **(1 Punkt)**. Begründung **(1 Punkt)**: Es handelt sich um eine Dreiecksmatrix, also können die Eigenwerte einfach auf der Diagonale abgelesen werden. (Alternative: Es gibt auch dann einen Punkt, wenn die Eigenwerte über das charakteristische Polynom ausgerechnet werden.)

Die algebraische Vielfachheit beträgt jeweils 1 **(1 Punkt)**.

(b) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A an, ohne die Eigenvektoren auszurechnen:
Die geometrische Vielfachheit jedes einzelnen Eigenwerts lautet 1 **(1 Punkt)**. Begründung: Zu jedem Eigenwert existiert immer mindestens ein Eigenvektor, also ist die geometrische Vielfachheit jeweils ≥ 1 **(1 Punkt)**. Da die geometrische immer kleinergleich der algebraischen Vielfachheit ist, ist die geometrische Vielfachheit auch jeweils ≤ 1 **(1 Punkt)**.

(c) Ist A diagonalisierbar?
Ja, A ist diagonalisierbar **(1 Punkt)**, denn algebraische und geometrische Vielfachheiten sind gleich **(1 Punkt)**.

(d) Geben Sie die Determinante von A an:
(1 Punkt) für das Ergebnis $\det(A) = 400$.

(1 Punkt) für die Begründung (Dreiecksmatrix, also ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente) **oder** für eine korrekte Berechnung, z.B. über Gauß oder Laplace-Entwicklung.

(e) Die Eigenwerte von A^2 sind die Quadrate der Eigenwerte von A **(1 Punkt)** und lauten $1, 25, 64, 100$. **(1 Punkt)**

3. Aufgabe (8 Punkte)

Geben Sie jeweils mit Begründung an, ob es sich bei der Menge U um einen Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2,2}$ handelt.

(a) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$:
Es handelt sich um einen Teilraum **(1 Punkt)**, denn

- mit jeder Matrix $u \in U$ ist auch $\lambda u \in U$ **(1 Punkt)**.
  Rechnung **(1 Punkt)**: $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & 0 \end{pmatrix}$.
- für je zwei Matrizen $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$ **(1 Punkt)**.
  Rechnung **(1 Punkt)**: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$:
Dies ist *kein* Teilraum **(1 Punkt)**.

Begründung **(2 Punkte)**: Der "Nullvektor" liegt nicht in U, d.h. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin U$.
Oder: Für $u \in U$ und $\lambda \neq 1$ ist $\lambda u \notin U$ (ein Gegenbeispiel genügt). Oder: Für $u, v \in U$ ist $u + v \notin U$ (auch hier genügt ein Gegenbeispiel).

4. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $< .,. >$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V, und sei $\|.\|$ die assoziierte Norm. Ferner seien $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ genau dann, wenn $< v, w >= 0$:

Ein möglicher Rechenweg lautet:

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= < v+w, v+w > \\ &= < v, v > + < v, w > + < w, v > + < w, w > \\ &= \|v\|^2 + 2 < v, w > + \|w\|^2 \ . \end{aligned}$$

Die Punkteverteilung lautet folgendermaßen:

- **1 Punkt** dafür, die Norm per Definition durch das Skalarprodukt zu ersetzen, d.h. für $\|v+w\|^2 =< v+w, v+w >$ **oder** $\|v\|^2 =< v, v >$ **oder** $\|w\|^2 =< w, w >$,
- **1 Punkt** dafür, die Symmetrie des Skalarprodukts zu verwenden, d.h. für $< v, w >=< w, v >$,
- **1 Punkt** für die Linearität des Skalarprodukts, z.B. für $< v+w, v+w >=< v+w, v > + < v+w, w >$,
- **1 Punkt** für die komplett richtige und vollständige Rechnung, und
- **1 Punkt** für eine kurze Begründung, warum die zu zeigende Aussage nun folgt.

(b) $< v+w, v-w >= 0$ genau dann, wenn $\|v\| = \|w\|$:
Ein möglicher Rechenweg lautet:

$$\begin{aligned} < v+w, v-w > &= < v, v > - < v, w > + < w, v > - < w, w > \\ &= < v, v > - < w, w > \\ &= \|v\|^2 - \|w\|^2 \ . \end{aligned}$$

Wie bei Teilaufgabe (a) werden die Punkte folgendermaßen vergeben:

- **1 Punkt** dafür, die Norm per Definition durch das Skalarprodukt zu ersetzen, d.h. für $\|v\|^2 =< v, v >$ **oder** $\|w\|^2 =< w, w >$,
- **1 Punkt** dafür, die Symmetrie des Skalarprodukts zu verwenden, d.h. für $< v, w >=< w, v >$,
- **1 Punkt** für die Linearität des Skalarprodukts, z.B. für $< v+w, v-w >=< v+w, v > - < v+w, w >$,
- **1 Punkt** für die komplett richtige und vollständige Rechnung, und
- **1 Punkt** für eine kurze Begründung, warum die zu zeigende Aussage nun folgt.