TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 04/05
Fakultät II - Mathematik
M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Februar-Klausur

Stand: 11. April 2005

---

1. Aufgabe (12 Punkte)

(a) Mit dem Gauß-Algorithmus $[A|\vec{b}]$ auf Zeilen-Stufen-Form bringen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -6 & -2+\beta \end{array}\right] \overset{II-I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 & -2+\beta \end{array}\right] \overset{III+2I}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Der Rang von A is definiert als die Anzahl der nichtverschwindenden Zeilen in

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also $Rang(A) = 2$ **(1 Punkt)**.
Analog ist der Rang von $[A|\vec{b}]$ die Anzahl der nichtverschwindenden Zeilen in

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right],$$

also

$$Rang([A|\vec{b}]) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & , & \text{für } \beta = 0 \\ 3 & , & \text{für } \beta \neq 0 \end{array} \right\} \quad \textbf{(1 Punkt)}.$$

(b)

$$\text{Das Gleichungssystem} \left\{ \begin{array}{ll} \text{hat keine Lösung} & \text{für } \beta \neq 0 \\ \text{hat unendlich viele Lösungen} & \text{für } \beta = 0 \end{array} \right\} \quad \textbf{(2 Punkte)}.$$

(c) Für $\beta \neq 0$ ist die Lösungsmenge laut Teil (b) leer, d. h. $\mathbf{L} = \emptyset$ **(1 Punkt)**.
Für $\beta = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_2 + x_3 = 1 \text{ und } x_1 + 3x_3 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \textbf{(2 Punkte)}. \end{aligned}$$

(d) Z. B. mit Hilfe von Algorithmus 4.5.3 kann man eine Basis des Bildes bestimmen:

1. Transponiere A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

2. Bringe A^T (mit dem Gauß-Algorithmus) auf Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \overset{III-3I}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{III-I/2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: \tilde{A}^T \quad \textbf{(2 Punkte)}.$$

3. Die Nicht-Null-Zeilen von $\tilde{A}^T$ bilden (als Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^3$ aufgefasst) eine Basis des Bildes.

Eine Basis des Bildes ist also $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ **(1 Punkt)**

2. Aufgabe

(11 Punkte)

(a) Lineare Unabhängigkeit. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0 \qquad (\textbf{1Punkt}) \\
\Leftrightarrow\ &\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ &\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = 0 \quad \text{für } x \in \{-1, 0, 1\} \qquad (\textbf{1Punkt}) \\
\Leftrightarrow\ &\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1(-1) + 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1(-1) & = 0 \\ \lambda_1(-1) + 2\lambda_3 & = 0 \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \qquad (\textbf{1Punkt})
\end{aligned}$$

Also sind die drei Polynome linear unabhängig **(1 Punkt)**.

(b) Zwei alternative Lösungswege.

1. Alternative: Nach Algorithmus 7.3.2 des Skriptes.
   1) Berechnen der Bilder der Basisvektoren. Wir schreiben $L(p)$ und $L(p)(x) = \ldots$ für das Polynom des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, das wir nach Anwendung der Abbildung L auf das Polynom $p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ erhalten.

$$\begin{aligned}
L(p_1)(x) &= p_1'(x) + p_1(x) \left(= \frac{d}{dx} 1 + 1 \right) = 1 \qquad (\textbf{1Punkt}) \\
L(p_2)(x) &= p_2'(x) + p_2(x) \left(= \frac{d}{dx} x + x \right) = 1 + x \qquad (\textbf{1Punkt}) \\
L(p_3)(x) &= p_3'(x) + p_3(x) \left(= \frac{d}{dx} x^2 + x^2 \right) = 2x + x^2 \qquad (\textbf{1Punkt})
\end{aligned}$$

   2) Berechnen der Koordinaten bzgl der Basis $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

$$L(p_1) = p_1 \Rightarrow K_{\mathcal{B}}(L(p_1)) = K_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\textbf{1Punkt})$$

$$L(p_2) = p_1 + p_2 \Rightarrow K_{\mathcal{B}}(L(p_2)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\textbf{1Punkt})$$

$$L(p_3) = 2p_2 + p_3 \Rightarrow K_{\mathcal{B}}(L(p_3)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\textbf{1Punkt})$$

   3) Diese Koordinaten bilden die Spalten der darstellenden Matrix: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(1 Punkt)**.

2. Alternative: Nach der Definition 7.3.1 der darstellenden Matrix.
   Ansatz:

$$L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1} \qquad (\textbf{1Punkt}*)$$

$$\text{mit } K_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_{\mathcal{B}}(p_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_{\mathcal{B}}(p_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen die Spalten der darstellenden Matrix $L_{\mathcal{B}}$ als $L_{\mathcal{B}} e_1 = K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)$. Für die Spalten **jeweils 2 Punkte**.

$$\begin{aligned}
K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1) &= K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L(p_1) = K_{\mathcal{B}}(p_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_2) &= K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L(p_2) \\
&= K_{\mathcal{B}}(p_1 + p_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_3) &= K_{\mathcal{B}} \circ L \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L\left(K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) = K_{\mathcal{B}} \circ L(p_3) \\
&= K_{\mathcal{B}}(2p_2 + p_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Also $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(1 Punkt*, alternativ zum vorherigen * Punkt)**.

3. Aufgabe

(9 Punkte)

Eigenwerte:

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \textbf{(1 Punkt)} \\
&\Longrightarrow \quad \lambda_1 = i \quad \textbf{(1 Punkt)}, \quad \lambda_2 = -i \quad \textbf{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu $\lambda = i$:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \ (I \leftrightarrow II) \cong \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ (II - iI) \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = s \in \mathbb{R} & \textbf{oder:} \ \ x_1 = 1 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{i}x_1 = ix_1 = is & \textbf{oder:} \ \ x_2 = i \end{array} \right\}$$

$$\textbf{oder:} \left\{ \begin{array}{ll} x_2 = s \in \mathbb{R} & \textbf{oder:} \ \ x_2 = 1 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -ix_2 = -is & \textbf{oder:} \ \ x_1 = -i \end{array} \right\} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \textbf{oder:} \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

... zu $\lambda = -i$:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \ (I \leftrightarrow II) \cong \begin{bmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ (II + iI) \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = s \in \mathbb{R} & \textbf{oder:} \ \ x_1 = 1 \\ -x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{i}x_1 = -ix_1 = -is & \textbf{oder:} \ \ x_2 = -i \end{array} \right\}$$

$$\textbf{oder:} \left\{ \begin{array}{ll} x_2 = s \in \mathbb{R} & \textbf{oder:} \ \ x_2 = 1 \\ -x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ix_2 = is & \textbf{oder:} \ \ x_1 = i \end{array} \right\} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \textbf{oder:} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nur $\vec{x}_2 = \overline{\vec{x}_1}$ angegeben (ohne Rechnung) **1 Punkt**, richtige Begründung ("EV zu konjugiert komplexen EW sind ebenfalls konjugiert komplex zueinander" etc.) zusätzlich **2 Punkte**.

4. Aufgabe

(8 Punkte)

(a) Es ist $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$. **(1 Punkt)**

(b) Zuerst ist auszumultiplizieren:

$$\vec{y} = C\vec{x} = \begin{bmatrix} 11/5 \\ -2/5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}. \textbf{ (1 Punkt)}$$

Die Norm berechnet sich zu

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{5+9} = \sqrt{14}. \textbf{ (1 Punkt)}$$

(c) Es ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11/5 \\ -2/5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 7$ **(1 Punkt)**,

und damit

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2},$$

und damit $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oder $\alpha = 60°$. **(1 Punkt)**

(d) **(1 Punkt)** für Ansatz mit transponieren und **(1 Punkt)** für das Ergebnis:

$$C^T C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) C ist orthogonal, denn $C^T C$ ergibt die Einheitsmatrix. **(1 Punkt)**