TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 04/05
Fakultät II - Mathematik
M. Lübbecke/V. Mehrmann/R. Nabben/H. Schwandt/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungen zur Februar-Klausur

Stand: 11. April 2005

Verständnisteil

1. Aufgabe (9 Punkte)

(a) Es gilt $A\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{u}$, **[1P]**
(d.h. $\vec{u}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$)

(b) $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\vec{v}$, **[1P]**
$\Rightarrow$ $\vec{v}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$. **[1P]**

(c) $A\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6\vec{w}$,
d.h. der Vektor $\vec{w}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 6$; **[1P]**
$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \lambda_3\vec{x}$,
der Vektor $\vec{x}$ ist demnach kein Eigenvektor zum Eigenwert λ_3. **[1P]**

(d) $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **[1P]**; $\quad S^{-1} = [\,\vec{u} \,|\, \vec{v} \,|\, \vec{w}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **[1P]**
(vgl. Algorithmus im Skript).

(e) $\det(A) = \det(D) = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ **[1P]**,
denn $\det(A) = \det(S^{-1}) \cdot \det(D) \cdot \det(S) = \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(D) \cdot \det(S) = \det(D)$. **[1P]**

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Es gilt $A\vec{u} = 0$, da $\vec{u} \in \mathrm{Kern}(A)$. **[1P]**

(b) Der Kern von A ist eindimensional, denn er wird von einem Vektor aufgespannt. **[1P]**
Die Dimension des Bildes von A ist gleich drei, **[1P]**
denn es gilt mit dem Dimensionssatz
$4 = \dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) = 1 + \dim(\mathrm{Bild}(A))$. **[1P]**

(c) Rang $(A) = 3$ **[1P]**
denn eine ZSF von A besitzt genau eine Nullzeile, oder: Rang = dim(Bild(A)) **[1P]**

(d) Die lineare Abbildung ist nicht injektiv, denn $A\vec{u} = 0 = A(-\vec{u})$, aber $\vec{u} \neq -\vec{u}$; **[1P]**
Die Abbildung ist demzufolge nicht bijektiv. **[1P]**

(e) Die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems
ist $\{\vec{v} + \vec{y} \mid \vec{y} \in \text{Kern(A)}\}$ **[1P]**

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$ **[1P]**

3. Aufgabe

(11 Punkte)

(a) Es ist $L_1(\vec{x} + \vec{y}) = L_1(\vec{x}) + L_1(\vec{y})$, denn

$$\begin{aligned} L_1(\vec{x} + \vec{y}) &= L_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = L_1\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} x_3 + y_3 - x_2 - y_2 \\ 2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

und das ist identisch mit

$$\begin{aligned} L_1(\vec{x}) + L_1(\vec{y}) &= L_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + L_1\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ 2y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_3 - x_2 + y_3 - y_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$ **(2 Punkte)**

Ebenso gilt $L_1(\lambda\vec{x}) = \lambda L_1(\vec{x})$, denn

$$L_1(\lambda\vec{x}) = L_1\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_3 - \lambda x_2 \\ 2\lambda x_1 + \lambda x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \lambda L_1(\vec{x}).$$ **(2 Punkte)**

L_1 ist also linear.

Alternative: Man kann auch zeigen, dass $L_1(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha L_1(\vec{x}) + \beta L_1(\vec{y})$ gilt. Das fasst beide Schritte in einem zusammen.

(b) L_2 ist nicht linear **(1 Punkt)**. Begründung und Rechnung **(2 Punkte)** z.B. anhand eines Gegenbeispiels ähnlich dem folgenden: sei $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\lambda = 0$. Dann ist

$$\lambda L_2(\vec{x}) = 0 \cdot L_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

aber

$$L_2(\lambda\vec{x}) = L_2(0 \cdot \vec{x}) = L_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Sind p und q beliebige Polynome aus dem Raum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, so ist

$L_3(p+q) = (p+q)'+p+q = p'+q'+p+q = (p'+p)+(q'+q) = L_3(p)+L_3(q)$.**(2 Punkte)**

Außerdem ist

$$L_3(\lambda p) = (\lambda p)' + (\lambda p) = \lambda p' + \lambda p = \lambda(p' + p) = \lambda L_3(p). \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

L_3 ist also linear. Ausführlicher, aber anschaulicher wird die Rechnung, wenn man konkrete Polynome mit beliebigen Koeffizienten benutzt, z.B. $p(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ und $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

Auch hier kann man alternativ beide Schritte in einem zusammenfassen, indem man zeigt, dass Ł$_3(\alpha p + \beta q) = \alpha L_3(p) + \beta L_3(q)$ gilt.

4. Aufgabe

(10 Punkte)

(a) Das Volumen des Spats stimmt mit dem Betrag der Determinante der Matrix
$S := [\vec{v} \,|\, \vec{w} \,|\, \vec{z}]$ überein **[1P]**
und $|\det(S)| = |-2-2+1| = 3$. **[1P]**

(b) Die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ sind linear unabhängig **[1P]**
denn anderenfalls hätte die Determinante von S gleich 0 sein müssen. **[1P]**

(c) Das Volumen des von $A\vec{v}, A\vec{w}$ und $A\vec{z}$ aufgespannten Spats ist gleich
$|\det([A\vec{v} \,|\, A\vec{w} \,|\, A\vec{z}])| = |\det(A \cdot [\vec{v} \,|\, \vec{w} \,|\, \vec{z}])| = |\det(A) \cdot \det(S)| = 12.$ **[1P]**

(e)

(i) Der Winkel zwischen $Q\vec{v}$ und $Q\vec{w}$ ist ebenfalls α **[1P]**

(ii) $||Q\vec{v}|| = \sqrt{< Q\vec{v}, Q\vec{v} >} = \sqrt{< \vec{v}, \vec{v} >} = ||\vec{v}|| = \sqrt{5}$; **[1P]**

(iii) Q ist invertierbar **[1P]**
Es gilt $Q^{-1} = Q^T$ **[1P]**

(iv) $\det(Q) = 1$ oder $\det(Q) = -1$, **[1P]**