Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05

Mehrmann, Nabben, Seiler 20. Juli 2005

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

14 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit **Bild** $A = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$ und $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimensionen des Bildes von A und des Kerns von A.

(b) Geben Sie den Rang von A an.

(c) Ist die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ injektiv/surjektiv/bijektiv?

(d) Hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{u}$ genau eine/keine/unendlich viele Lösungen?

(e) Geben Sie die Determinante von A an.

2. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie jeweils an, ob es sich bei der Menge U um einen Teilraum des Vektorraumes $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ handelt.

(a) $U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : p'(0) = 1\}$.

(b) $U = \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : p(1) = 0\}$.

(c) $U = \{p \cdot q : p, q \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]\}$.

3. Aufgabe

11 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$-Matrix. A sei **nicht invertierbar**.

(a) Gibt es in der normierten Zeilenstufenform von A Nullzeilen? (ohne Begründung)

(b) Geben Sie die Determinante von A an. (ohne Begründung)

(c) Sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig? (ohne Begründung)

(d) Sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig? (ohne Begründung)

(e) Was kann man über die Dimension des Kerns von A aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort!

(f) Geben Sie einen Eigenwert von A an. Begründen Sie Ihre Antwort!

(g) Kann A orthogonal sein? Begründen Sie Ihre Antwort!

4. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien zwei Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ des $\mathbb{R}^n$ und die zugehörigen Koordinatenabbildungen $K_{\mathcal{B}_1}$ und $K_{\mathcal{B}_2}$.

(a) Wie berechnet man die Matrix T der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$?

(b) Wann ist T invertierbar? Was ist dann die Bedeutung von T^{-1} und wie berechnet man es aus $K_{\mathcal{B}_1}$ und $K_{\mathcal{B}_2}$?

(c) Wie bestimmt man auf einfache Weise T^{-1}, wenn $\mathcal{B}_1$ eine beliebige Basis und $\mathcal{B}_2$ die Standardbasis ist?

(d) Sei $L_{\mathcal{B}_1} \in \mathbb{R}^{n,n}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$. Geben Sie eine Formel für die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ der linearen Abbildung L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ an.

(e) Wie berechnet man $L_{\mathcal{B}_1}$, wenn $L_{\mathcal{B}_2}$ und T gegeben sind?