Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05
Mehrmann, Nabben, Seiler 12. Oktober 2005

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Wenden Sie das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

an, um aus $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu erzeugen.

2. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren von A.

(b) Geben Sie für alle Eigenwerte die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

(c) Geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

3. Aufgabe 13 Punkte

Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2\mu \\ 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu + 2 \\ -2\mu + 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ in Abhängigkeit vom Parameter μ. Geben Sie den Rang der Matrix A an in Abhängigkeit vom Parameter μ.

(b) Für welche Werte von μ hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung / unendlich viele Lösungen / keine Lösung? Begründung!

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\mu = -2$.

(d) Für welchen Wert von μ besteht der Kern von A nicht nur aus dem Nullvektor? Geben Sie für dieses μ eine Basis des Kerns an.

4. Aufgabe 6 Punkte

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind zwei Basen gegeben durch

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Berechnen Sie die darstellende Matrix der Koordinatenabbildung K_{B_2}.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix S der Koordinatentransformation von B_1 nach B_2.

(c) Berechnen Sie die Koordinaten $\vec{x}_{B_2}$ des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis B_2, wenn $\vec{x}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist.