Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
B. Jacob/J. Liesen/R. Nabben/R. Seiler/T. Stykel

WS 05/06
12. April 2006

April – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben seien $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Geben Sie die Eigenwerte von A und ihre jeweiligen algebraischen Vielfachheiten an.

(c) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ sowie die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Geben Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Standardbasis an.

(d) Berechnen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Zeigen Sie, dass $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

4. Aufgabe

6 Punkte

Es seien der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$ und die Matrix $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ gegeben.

Berechnen Sie a, b, c so, dass die Determinante der Matrix A gleich 5 ist und die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.