Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2006
C. Mehl/R. Nabben/R. Seiler 26. Juli 2006

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

(b) Berechnen Sie den Kern und das Bild von $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

(c) Berechnen Sie $B := A \cdot A^T$.

(d) Bestimmen Sie den Rang von B.

2. Aufgabe 15 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Es sei $\vec{v}_i$ der i-te Spaltenvektor von A.

(a) Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ in eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ (bzgl. des Standardskalarproduktes) zu überführen.

(b) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Bestimmen Sie eine QR-Faktorisierung der Matrix A.

(d) Zeigen Sie, dass $|det(Q)| = 1$ für **jede** orthogonale Matrix Q gilt.

(e) Bestimmen Sie $|det(A)|$.

3. Aufgabe 6 Punkte

Ist die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort vollständig.

4. Aufgabe 10 Punkte

Es sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von A.

(b) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist, und geben Sie ggfs. eine zugehörige Diagonalmatrix an.