Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2006

Mehl/Nabben/Penn-Karras/Seiler 11. Oktober 2006

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze Begründung an!
Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

11 Punkte

Sind die folgenden Abbildungen $F_1 \dots F_4$ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen? Geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an. ($\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm)

$$F_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1x_2x_3 \end{bmatrix},$$
$$F_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad F_4(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \|\vec{x}\| \\ -\|\vec{x}\| \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe

12 Punkte

(a) Gibt es eine Matrix (außer der Nullmatrix) die (als lineare Abbildung aufgefasst) einen Eigenwert 0 besitzt?

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{7,7}$ invertierbare Matrizen. Ist dann auch das Produkt AB invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Formel für die Inverse an.

(c) Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit den Eigenwerten 1 und -1. Ist A invertierbar?

(d) Sei $R \in \mathbb{R}^{6,6}$ eine orthogonale Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^6$. Zeigen Sie, dass $R^T\vec{b}$ eine Lösung des Gleichungssystems $R\vec{x} = \vec{b}$ ist. Ist diese Lösung eindeutig?

(e) Es sei $A \in \mathbb{R}^{7,7}$ gegeben. Es gelte $\det(A) = 0$. Kann die Abbildung $A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sein?

3. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{y}(t)$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}$ eine Lösung des Anfangswertproblems?

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sind die Polynome $p_1(x) = x^5 - x^2$, $p_2(x) = x^5$, $p_3(x) = x^5 + x^2$ und $q_1(x) = 0$, $q_2(x) = x^2$, $q_3(x) = x^7$. Weiter sei $S := \text{Span}\,\{p_1, p_2, p_3\}$.

(a) Sind die Polynome p_1, p_3, q_3 linear unabhängig?

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{p_1, p_3\}$ eine Basis von S bilden.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von S.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Polynome q_1, q_2, q_3 bzgl. der Basis $\mathcal{B}$, sofern die Polynome in S liegen.