RT

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bringen Sie A auf normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie den Kern von A.

(d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A.

2. Aufgabe

9 Punkte

(a) Sind die Matrizen $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ linear unabhängig?

(b) Bilden die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

3. Aufgabe

9 Punkte

Es sei der zweidimensionale Vektorraum $V = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen 2×2 - Diagonalmatrizen mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle = \langle \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

gegeben. Überführen Sie die Basis $\{A_1, A_2\}$ mit $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren in eine Orthonormalbasis $\{B_1, B_2\}$ bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

4. Aufgabe

12 Punkte

Es sei $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ist A diagonalisierbar?

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

VT

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze, aber vollständige Begründung an! Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

9 Punkte

Es seien $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ und der Teilraum $T = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von T.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von T.

(d) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\vec{x}_{\mathcal{B}}$ von $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bzgl. der in (b) gewählten Basis $\mathcal{B}$.

2. Aufgabe

8 Punkte

(a) Zeigen Sie für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, dass $T = Kern(A)$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Überprüfen Sie, ob die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

3. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei $A = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ausserdem sei $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ und $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $A\vec{v}$, $A\vec{w}$, $A\vec{x}$ und $B \cdot C$.

(b) Welche der Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ sind keine Eigenvektoren von A? Welche sind Eigenvektoren? Zu welchen Eigenwerten?

(c) Es sei die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie die darstellende Matrix M von A bzgl. $\mathcal{B}$.

(d) Berechnen Sie e^{3A}.

4. Aufgabe

11 Punkte

Zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ sind Matrizen $Q = \begin{bmatrix} 1 & q & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ und $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & s \\ r & 0 & t \end{bmatrix}$ gegeben. Von A sind die Einträge $a_{23} = 2$ und $a_{33} = 11$ bekannt.

(a) Bestimmen Sie $q, r, s, t \in \mathbb{R}$ so, dass Sie mit Q und R eine QR-Zerlegung von A erhalten.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A.