Verständnisteil

1. Aufgabe [9 Punkte]

(a) 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, falls die Determinante der Matrix, die die Vektoren als Spalten enthält, ungleich null ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{Z.1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

Also sind die drei Vektoren linear abhängig.

(Alternativ kann man auch die Matrix bestehend aus den gegebenen Spaltenvektoren auf ZSF bringen und argumentieren oder Linearkombination des Nullvektors hat mehr als nur die triviale Lösung oder ...)

(b) Da $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ gilt, ist $T = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Also bilden $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ein Erzeugendensystem von T.

Wegen $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 0, \mu = 0$ sind die beiden Vektoren auch linear unabhängig , also *eine* Basis von T: $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c) Dimension: Anzahl Basiselemente. Nach (b) also $dim(T) = 2$.

(d) Wegen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Aufgabe [8 Punkte]

(a) Überprüfe für $T = Kern(A) = \{\vec{x} | A\vec{x} = \vec{0}\}$ die drei Teilraumkriterien.

  (a) Für jede Matrix A gilt $A \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in T \Rightarrow T \neq \emptyset$

  (b) Seien $\vec{x}, \vec{y} \in T$, d.h. $A\vec{x} = A\vec{y} = \vec{0}$
  Dann gilt $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \overset{Vor.}{=} \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in T$

  (c) Sei $\vec{x} \in T, \lambda \in \mathbb{R}$.
  Dann gilt $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} \overset{\vec{x}\in T}{=} \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{x} \in T$

Da alle drei Bedingungen für Teilräume erfüllt sind, ist $Kern(A)$ ein Teilraum für jede Matrix A.

(b) Da $A \cdot \vec{0} = \vec{0} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gilt, ist $\vec{0} \notin \mathbb{L}$, also ist $\mathbb{L}$ kein Teilraum.

Alternative Begründungen (Angabe eines Gegenbeispiels oder Nachweis, dass eine der Teilraumbedingungen nicht erfüllt ist) möglich.

3. Aufgabe [12 Punkte]

(a) $A\vec{v} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} (= -2\vec{v})$

$A\vec{w} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (= \vec{w})$

$A\vec{x} \overset{1.Sp.}{=} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} (\neq \lambda\vec{x})$

$BC = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I$ (C ist also die Inverse von B)

(b) Aus (a) kann man ablesen, dass $\vec{x}$ kein Eigenvektor , aber dass $\vec{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert -2 und $\vec{w}$ Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist.

(c) Die Basis $\mathcal{B}$ besteht aus den Eigenvektoren $\vec{w}$ und $\vec{v}$. (Also ist die darstellende Matrix eine Diagonalmatrix , deren Diagonalelemente die Eigenwerte in der Reihenfolge der Eigenvektoren sind:) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(d) $e^{3A} = Se^{\mathbf{3}M}S^{-1}$ mit M aus (c), also z.B. $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.$S^{-1}$ ist aus (a) bekannt ($S^{-1} = C$). Also

$$e^{3A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^3 & -2e^{-6} \\ -e^3 & e^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^3 + 2e^{-6} & -2e^3 + 2e^{-6} \\ e^3 - e^{-6} & 2e^3 - e^{-6} \end{bmatrix}.$$

4. Aufgabe [11 Punkte]

(a) QR-Zerlegung einer Matrix A bedeutet, dass Q orthogonal, R obere Dreiecksmatrix und $A = QR$ gilt.

Da Q orthogonal sein soll, müssen die Spalten von Q, also insb. auch die ersten beiden Spalten orthogonal zueinander sein. Also $0 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \rangle = q$, d.h. $q = 0$.

Da R obere Dreiecksmatrix ist , muss $r = 0$ sein.

Die fehlenden Einträge von R kann man über Skalarprodukte berechnen:

$s = r_{23} = \langle \vec{q}_2, \vec{a}_3 \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \rangle = -8/5 + 33/5 = 5$

$t = r_{33} = \langle \vec{q}_3, \vec{a}_3 \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \rangle = 6/5 + 44/5 = 10$

(b) $det(A) = det(QR) = det(Q) \cdot det(R) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\right) det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\right)$

$\overset{1.S,\, R\ ob.Dr.}{=} \begin{vmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{vmatrix} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10 = -\frac{25}{25} \cdot 20 = -20$