Verständnisteil

1. Aufgabe [15 Punkte]

(a) Aus $L(\vec{b}_1) = \vec{b}_2$, $L(\vec{b}_2) = \vec{b}_3$, $L(\vec{b}_3) = \vec{b}_2$ folgt $K_{\mathcal{B}}\left(L(\vec{b}_1)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,$K_{\mathcal{B}}\left(L(\vec{b}_2)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$K_{\mathcal{B}}\left(L(\vec{b}_3)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Also $L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Idee: $L(\vec{b}_1) = L(\vec{b}_3)$. Sei beispielsweise $\vec{v} = \vec{b}_3 - \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Es gilt $L(\vec{v}) = L(\vec{b}_3 - \vec{b}_1) \overset{L\ linear}{=} L(\vec{b}_3) - L(\vec{b}_1) \ = \vec{0} \ \Rightarrow \vec{v} \in Kern(L)$.

(c) Da der Eigenraum von L zum Eigenwert 0 gleich dem Kern von L ist, ist laut b) beispielsweise $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Oder: Laut b) ist $L(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \vec{0} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Also ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Bild(L)$ linear unabhängig $\Rightarrow dim(Bild(L)) \geq 2$.

Nach b) ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in Kern(L) \Rightarrow dim(Kern(L)) \geq 1$.

Laut Dimensionssatz gilt $dim(Kern(L)) + dim(Bild(L)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Die drei (Un-)Gleichungen sind nur erfüllt für $dim(Bild(L)) = 2, dim(Kern(L)) = 1$.

Mehrere Alternativen möglich.

(e)
1. Da $dim(Kern(L)) \neq 0$, ist L nicht injektiv.
2. Da $dim(Bild(L)) = 2 \neq 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, ist L nicht surjektiv.
3. Da L nicht injektiv (oder: nicht surjektiv) ist, ist die Abbildung auch nicht bijektiv.

2. Aufgabe [9 Punkte]

(a) Da die Spalten eine Orthonormalbasis bilden, ist C eine orthogonale Matrix. Deshalb gilt $C^{-1} = C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Da eine ONB gegeben ist, kann man die Koordinaten aus folgenden Skalarprodukten berechnen: $\langle \vec{v}, \vec{c}_1 \rangle = 1 + 0 + 2 = 3$,$\langle \vec{v}, \vec{c}_2 \rangle = 2 + 0 - 1 = 1$,$\langle \vec{v}, \vec{c}_3 \rangle = 0 + 2 + 0 = 2$.

Der gesuchte Koordinatenvektor ist also $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Alternativ kann das LGS $\lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \lambda_3 \vec{c}_3 = \vec{v}$ gelöst werden.

(c) Da C invertierbar ist, hat das LGS genau eine Lösung. Weil die rechte Seite des LGS gleich der zweiten Spalte von C ist, ist $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Alternativen möglich (z.B. über die Inverse von C oder Gauß-Algorithmus)

(d) $V = \left| det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| -det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right| = |-(-1)| = 1$

Alternativ: Da die Vektoren eine ONB bilden, spannen sie einen Würfel der Kantenlänge 1 auf. Dieser hat das Volumen 1.

3. Aufgabe [7 Punkte]

(a) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mit Eigenwerten 1 und 2 , also algebraische Vielfachheit jeweils 1. Es ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit Eigenwert 1 und algebraischer Vielfachheit 2.

Alternativ: Wähle beispielsweise $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wegen $p_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$ und $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ sind die algebraischen Vielfachheiten der beiden Eigenwerte 1. Es ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mit Eigenwert 1 und algebraischer Vielfachheit 2.

(c) Wähle z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dann ist $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe [9 Punkte]

(a) Da für $L_1(0x^2 + 0x + 0) = 0x^2 + x - 0 = x$, also $L_1(0) \neq 0$ gilt, ist L_1 keine lineare Abbildung.
Alternative Begründung (Angabe eines Gegenbeispiels) möglich.

(b) Rechne für L_2 die Linearität nach.

1. Seien $a_1x + b_1, a_2x + b_2 \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
   Dann gilt $L_2(a_1x + b_1 + a_2x + b_2) = L_2((a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)) = 3(a_1 + a_2)x^2 = 3a_1x^2 + 3a_2x^2 = L_2(a_1x + b_1) + L_2(a_2x + b_2)$.
2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}, ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
   Dann gilt $L_2(\lambda(ax + b)) = L_2(\lambda ax + \lambda b) = 3(\lambda a)x^2 = \lambda \cdot 3ax^2 = \lambda L_2(ax + b)$.

L_2 ist eine lineare Abbildung.

(c) Gegenbeispiel: Betrachte z.B. $x + 1, x + 2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.
Es ist $L_3(x + 1 + x + 2) = L_3(2x + 3) = -6$, aber $L_3(x + 1) + L_3(x + 2) = -1 - 2 \neq -6$.
Also ist L_3 keine lineare Abbildung.